

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL
MATEMAATIKAINSTITUUT

Peeter Puusemp

DISKREETNE MATEMAATIKA

Elektrooniline loengukonspekt

TALLINN
2005

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 1 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

© Peeter Puusemp, 2005
ISBN *****

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 2 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Eessõna

Paljudes tehnikaülikoolides on *diskreetne matemaatika* üks olulisemaid matemaatilisi distsipliine. Seda just tema tiheda seose tõttu rakendustega. Eriti ei saa puududa diskreetne matemaatika informaatikaerialade üliõpilaste õppekavast. Laias laastus võib eristada diskreetset matemaatikat nn *pidevast matemaatikast* selle poolest, et selles pole keskel kohal piirväärtuse abil defineeritavad matemaatilised mõisted, vaid püütakse neid, nii palju kui võimalik, vältida. Aja jooksul on välja kujunenud tüüpilised probleemid, mida käsitletatakse diskreetse matemaatika kursustes. Loomulikult on matemaatika jaotus diskreetseks ja pidevaks üsnagi tinglik. Termin *diskreetne matemaatika* on käibele võtnud tõenäoselt õppekavade koostajad ning tänaseks on see termin meie sõnavarasse sügavalt juurdunud.

Tüüpilised probleemid, mis leiavad käsitlemist erinevates õppeasutustes diskreetse matemaatika kursustes, on järgmised: naiivne hulgateooria, matemaatilise loogika elemendid, formaalsed aksiomaatilised teooriad, algoritmiteooria, automaatide teooria, rekursiooniteooria, kombinatoorika, arvuteooria elemendid, kodeerimisteooria, graafiteooria ja abstraktse algebra elemendid. Kui olla korrektne, siis oleks pidanud igale loetletud matemaatika osale lisama sõna *elemendid*, sest ühtegi neist ei käsitleta aine õpetamisel põhjalikult. Erinevad ülikoolid valivad oma diskreetse matemaatika kursusesse antud loetelust erinevad osad, vastavalt oma vajadustele ja kuulajaskonnale.

Käesolevas õppevahendis on esitatud materjal, mille autor on lülitanud oma diskreetse matemaatika loengukursusesse. Iga peatüki lõpus on ülesanded, milledest osa lahendatakse harjutustundides, osa aga on mõeldud täiendavaks harjutamiseks. Ülesanded on varustatud vastustega, mis asuvad õpiku lõpus.

Autor

[Autori koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#)[▶▶](#)[◀](#)[▶](#)

Lk 3 / 247

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

SISUKORD

SISUKORD	4
1 LAUSEARVUTUS	6
1.1 Lausearvutuse valemid	6
1.2 Tautoloogiad	11
1.3 Loogiliselt samaväärsed valemid	13
1.4 Duaalsusprintsip	16
1.5 Disjunktiivne normaalkuju	17
1.6 Boole'i funktsioonid	22
1.7 Ülesandeid	30
2 PREDIKAATARVUTUS	36
2.1 Predikaadid ja kvantorid	36
2.2 Funktsioonid	40
2.3 Esimest järku keeled	41
2.4 Signatuuri interpretatsioonid	44
2.5 Predikaatarvutuse põhiseadused	50
2.6 Ülesandeid	55
3 FORMAALSED AKSIOMAATILISED TEOORIA	57
3.1 Sissejuhatus	57
3.2 Formaalne aksiomaatiline teooria	58
3.3 Lausearvutus formaalse aksiomaatilise teooriana	61
3.4 Deduktsiooniteoreem	63
3.5 Täielikkuse teoreem	68
3.6 Teisi formaalseid aksiomaatilisi teooriaid	72
3.7 Formaalse aksiomaatilise teooriaga seotud mõisteid	73
3.8 Ülesandeid	77
4 ALGORITMITEOORIA ELEMENTE	78
4.1 Sissejuhatus	78
4.2 Keel	80
4.3 Regulaarne keel	81
4.4 Lõplik automaat	83
4.5 Väljundsümboliteta automaadid	88

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 4 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.6	Grammatika	92
4.7	Turingi masin	97
4.8	Arvutatavad funktsioonid	101
4.9	Rekursiivsed funktsioonid	107
4.10	Ülesandeid	112
5	GRAAFITEOORIA ELEMENTE	121
5.1	Sissejuhatavaid mõisteid	121
5.2	Näiteid graafidega seotud ülesannetest	124
5.3	Intsidentsus. Kaarte graaf	125
5.4	Graafiga seotud maatriksid	128
5.5	Alamgraaf	130
5.6	Marsruudid graafis	131
5.7	Sidus graaf	135
5.8	Euleri tsüklid	137
5.9	Hamiltoni tsüklid	139
5.10	Tasandilised graafid	142
5.11	Kuratowski teoreem	147
5.12	Platoni kehad	149
5.13	Graafide värvimine	152
5.14	Puu	154
5.15	Puude rakendusi	157
5.16	Kattev puu	160
5.17	Lühima tee ülesanne	165
5.18	Vahendite jaotamine tootmise laiendamiseks	172
5.19	Maksimaalne voog võrgus	177
5.20	Ülesandeid	189
6	Vastused	204
	Kirjandus	239
	Aineregister	241

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 5 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1. LAUSEARVUTUS

1.1. Lausearvutuse valemid

Lausearvutuse keskseks mõisteks on *lause* mõiste. Lause täpset definitsiooni ei anta, seda kirjeldatakse. Lausete all mõistetakse igapäevases kõnekeeles kasutatavaid lauseid. Kuna lausearvutus püüab anlüüsida lauseid nende tõesuse või mittetõesuse (vääruse) seisukohalt, siis lause sisu ei paku selles teoorias mingit huvi. Lausearvutuses vaadeldakse **ainult** neid igapäevase kõnekeeles lauseid, mille kohta saab öelda, et see on **tõene** või **väär**. Lauseid hakkame tähistama sümboolitega $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$

Näide 1.1. Lausearvutuse lauseteks on näiteks laused

Jõgeva on sadamalinn.

Mari on tütarlapse nimi ja Tallinn on Eesti pealinn.

See-eest lause *Meie president on ilus mees* pole lausearvutuse lause, sest selle kui hinnangut andva lause kohta ei saa otsustada, kas ta on tõene või väär. Lause *Jõgeva on sadamalinn* on ilmselt väär, lause *Mari on tütarlapse nimi ja Tallinn on Eesti pealinn* on aga tõene.

Lausete tõeväärtusi tähistatakse lühidalt kas t (tõene) ja v (väär) või 1 (tõene) ja 0 (väär). Meie oma kursuses hakkame kasutama sümboleid 1 ja 0.

Igapäevases kõnekeeles moodustatakse antud lausetest uusi lauseid, nn liitlauseid. Selleks kasutatakse mitmeid võtteid: eitust, sideõnu, ja, või, konstruktsiooni *...kui...*, *siis...* jms. Ka lausearvutuses toimitakse analoogiliselt ehk, teisiti öeldes, lausetega teostatakse tehteid. Lausetega teostatavad tehted on:

- 1) Lause $\mathcal{A}$ **eitas** $\neg\mathcal{A}$, mis seisneb lauses $\mathcal{A}$ esineva väite eitamises. Lause $\neg\mathcal{A}$ on tõene parajasti siis, kui lause $\mathcal{A}$ on väär.
- 2) Lausete $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ **konjunktsioon** $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, mis tähendab lauset " $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ ". Lause $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$ on tõene parajasti siis, kui on tõesed mõlemad laused $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$.
- 3) Lausete $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ **disjunktsioon** $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, mis tähendab lauset " $\mathcal{A}$ või $\mathcal{B}$ ". Lause $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ on tõene parajasti siis, kui on tõene vähemalt üks

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 6 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

lausetest $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$.

4) Lausete $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ **implikatsioon** $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, mis tähendab lauset "*Kui $\mathcal{A}$, siis $\mathcal{B}$* ". Lause $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ loetakse vääraks ainult siis, kui $\mathcal{A}$ on tõene ja $\mathcal{B}$ on väär. See püüab kajastada põhimõtet, et tõesest väitest ei saa tuletada vääraid väiteid, väärast väitest aga võib tuletada nii vääraid kui ka tõeseid väiteid.

5) Lausete $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ **ekvivalents** $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$, mis tähendab lauset " *$\mathcal{A}$ on samaväärne lausega $\mathcal{B}$* ". Lause $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ on tõene parajasti siis, kui on laused $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ omavad samu tõeväärtusi.

Näide 1.2. Vaadelgem lauseid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$: *Paul tuli eile linnast.*

$\mathcal{B}$: *Kaks korda kaks on neli.*

Siis lauseteks $\neg\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ ja $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ on järgmised laused:

$\neg\mathcal{A}$: *Paul ei tulnud eile linnast.*

$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$: *Paul tuli eile linnast ja kaks korda kaks on neli.*

$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$: *Paul tuli eile linnast või kaks korda kaks on neli.*

$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$: *Kui Paul tuli eile linnast, siis kaks korda kaks on neli.*

$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$: *Paul tuli eile linnast on samaväärne (sama tõene) asjaoluga, et kaks korda kaks on neli.*

Kui on teada lausete $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tõeväärtused, siis nendest lausetest $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tehete $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$ ja $\sim$ tulemusena saadud lausete tõeväärtused sõltuvalt lausete $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tõeväärtustest on esitatud järgmises tabelis:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

Lausetele võib korduvalt rakendada tehteid ja nii on saadavad küllaltki keerulise struktuuriga laused. Iga lause tõeväärtus on sõltuvalt komponentlausete tõeväärtustest ülaltoodud tabeli alusel lihtsalt arvu-
tatav ja tulemusena saadakse vaadeldava lause nn **tõeväärtustabel**.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 7 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 1.3. Lause $((\mathcal{A} \sim \mathcal{B}) \rightarrow ((\neg \mathcal{A}) \wedge \mathcal{B}))$ tõeväärtustabel saadakse järk-järgult osalauseste tõeväärtusi arvutades:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$	$\neg \mathcal{A}$	$\neg \mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$	$((\mathcal{A} \sim \mathcal{B}) \rightarrow ((\neg \mathcal{A}) \wedge \mathcal{B}))$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0

Samu arvutusi võib sooritada ka lühendatult järgmise tabeli kujul:

$((\mathcal{A} \sim \mathcal{B}) \rightarrow ((\neg \mathcal{A}) \wedge \mathcal{B}))$
1 1 1 0 0 0 1
1 0 0 1 0 0 0
0 0 1 1 1 1 1
0 1 0 0 1 0 0

Formaliseerime järgnevalt eelnevad arutlused. Unustagem, et lausetel on mingi sisuline tähendus ja opereerime nendega justkui teatavate valemitega. Tekkivat loogilist süsteemi nimetatakse *lausearvutuseks*. Meid huvitavad formaalsed reeglid, mille alusel toimuvad arutlused lausetega. Saadud formaalsete reeglite kogumit nimetatakse lausearvutuse **süntaksiks**.

Lausearvutuse valemite moodustamiseks vajatakse järgnevaid sümboleid:

- 1) lausemuutujaid: $X, Y, Z, \dots, X_1, X_2, \dots, Y_1, Y_2, \dots$;
- 2) viit loogilist sümboolit: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$;
- 3) kahte sulgu: (ja).

Lausemuutujate hulk on loenduv¹.

Lausearvutuse valemi definitsioon:

- 1) Iga lausemuutuja on lausearvutuse valem.
- 2) Kui $\mathcal{A}$ on valem, siis ka $(\neg \mathcal{A})$ on valem (valemi $\mathcal{A}$ eituse).

¹Lõpmatut hulka nimetatakse *loenduvaks*, kui leidub üksühene vastavus selle hulga ja kõigi naturaalarvude hulga elementide vahel.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 8 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

3) Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on valemid, siis ka $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ ja $(\mathcal{A} \sim \mathcal{B})$ on valemid (vastavalt valemite $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ *konjunktsioon*, *disjunktsioon*, *implikatsioon* ja *ekvivalentsus*).

4) Lausearvutuse valemiteks on ainult need avaldised, mis on seda ülalloetletud tingimuste põhjal.

Seega lausearvutuse valemid saadakse ülal loetletud lausearvutuse sümbolitest järk-järgult. Definitsioonis esinevad sümbolid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ pole lausearvutuse sümbolid, neid kasutatakse kui abisümboleid valemile viitamiseks.

Näide 1.4. Järgnevad avaldised on lausearvutuse valemid:

$$(((\neg X) \wedge Y) \rightarrow Z)$$

$$((Y \sim Z) \vee X)$$

Avaldised

$$(Y \sim Z) \vee X \quad (1.1)$$

$$((\neg X) \wedge Y \rightarrow Z) \quad (1.2)$$

aga pole lausearvutuse valemid: avaldises (1.1) puuduvad välimised sulud, avaldises (1.2) puuduvad aga sulud sümbolite $(\neg X)$ ees ja sümbolite $\wedge Y$ järel.

Lausearvutuse valemite tähistena kasutame sümboleid $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \dots$. Kui valem $\mathcal{A}$ on moodustatud lausemuutujatest $X_1, X_2, \dots, X_n$, siis selle rõhutamiseks tähistame teda kujul $\mathcal{A}(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Et vähendada sulgude arvu valemis, jäetakse osa sulge kokkuleppeliselt ära. Tehteid sooritatakse sulgude puudumise korral järgmises järjekorras:

$$\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim.$$

Ühe ja sama tehte korral sooritatakse tehteid valemitega järjest vasakult paremale.

Näide 1.5. Taastades valemis

$$X \vee \neg Y \sim Z \rightarrow X$$

sulud, saadakse

$$((X \vee (\neg Y)) \sim (Z \rightarrow X)).$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 9 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Igale lausearvutuse valemile $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ vastab tõeväärtustabel. Selleks tuleb anda lausemuutujatele $X_1, X_2, \dots, X_n$ kõikvõimalikud tõeväärtused ja teostada tõeväärtustega vastavalt valemi konstruktsioonile tehted nõutud järjekorras. Tõeväärtustega teostatakse tehteid näitele 1.3 eelneva tabeli eeskujul. Seejuures saadakse valemi $\mathcal{A}$ tõeväärtus, mis vastab lausemuutujate $X_1, \dots, X_n$ valitud tõeväärtustele.

Näide 1.6. Valemi $\mathcal{A} = (((\neg X) \wedge Y) \rightarrow Z)$ tõeväärtustabel koos vahearvutustega on

X	Y	Z	$((\neg X) \wedge Y) \rightarrow Z$				
1	1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	0	0
0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	0	1	0	0	1	0

Rasvaselt on selles tabelis kujutatud lause $\mathcal{A}$ tõeväärtus.

Lausearvutuse rakendamiseks tuleb lausearvutuse valemis $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ esinevatele muutujatele $X_1, \dots, X_n$ anda konkreetne tähendus mingi lause näol. Nii saadakse valemi $\mathcal{A}$ **interpretatsioon**.

Näide 1.7. Vaatleme valemit $\mathcal{A} = (((\neg X) \wedge Y) \rightarrow Z)$. Anname lausemuutujatele X, Y, Z järgmised tähendused:

X : *Tartu on ülikoolilinn*

Y : *Vaal on imetaja*

Z : *Kaks korda kaks on viis*

Siis valemi $\mathcal{A}$ interpretatsiooniks on lause *Kui Tartu pole ülikoolilinn ja vaal on imetaja, siis kaks korda kaks on viis*. Selle interpretatsiooni korral laused X ja Y on tõesed, lause Z aga väär. Näites 1.6 toodud tabelist on näha, et sellise interpretatsiooni korral on valem $\mathcal{A}$ tõene.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 10 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.2. Tautoloogiad

Vaadelgem lausearvutuse valemit $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$. Tähistame selle valemi tõeväärtust lausemuutujate $X_1, \dots, X_n$ tõeväärtuste $(x_1, \dots, x_n)$ korral $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$.

Näide 1.8. Näites 1.6 toodud valemi $\mathcal{A}$ jaoks (vt seal toodud tõeväärtustabelit)

$$\mathcal{A}(1, 1, 1) = 1, \mathcal{A}(1, 1, 0) = 1, \mathcal{A}(1, 0, 1) = 1,$$

$$\mathcal{A}(1, 0, 0) = 1, \mathcal{A}(0, 1, 1) = 1, \mathcal{A}(0, 1, 0) = 0,$$

$$\mathcal{A}(0, 0, 1) = 1, \mathcal{A}(0, 0, 0) = 1.$$

Vastavalt tekkinud tõeväärtustele $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$ liigitatakse valemid järgnevalt:

- 1) Valemite $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ nimetatakse **tautoloogiaks** ehk **samaselt tõeseks valemiks**, kui $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = 1$ iga tõeväärtuste valiku $x_1, \dots, x_n$ korral.
- 2) Valemite $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ nimetatakse **kontradiktsiooniks** ehk **samaselt vääraks valemiks**, kui $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = 0$ iga tõeväärtuste valiku $x_1, \dots, x_n$ korral.
- 3) Valemite $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ nimetatakse **kontingentseks valemiks**, kui ta pole tautoloogia ega kontradiktsioon.
- 3) Valemite $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ nimetatakse **kehtestatavaks valemiks**, kui leidub selline tõeväärtuste valik $x_1, \dots, x_n$, et $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = 1$.

Nii tautoloogia kui ka kontingentne valem on kehtestatavad valemid.

Näide 1.9. Valem $(X \vee (\neg X))$ on tautoloogia. Valem $(X \wedge (\neg X))$ on kontradiktsioon. Valem $((\neg X) \vee Y) \rightarrow Z$ on kontingentne valem. Õeldus võib veenduda, leides nende valemite tõeväärtustabelid.

Tautoloogiad kirjeldavad loogikaseadusi. Nende iga interpretatsioon on tõene. Algoritmiteoorias nimetatakse hulki, millesse kuulamise kontrolliks leidub algoritm, **lahenduvateks hulkadeks**. Tautoloogiate hulk on lahenduv (algoritmiks on tõeväärtustabelite koostamine). Ka kontradiktsioonide hulk on lahenduv.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 11 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Järgnevalt näitame mõned lihtsad võtted antud tautoloogiatest uute tautoloogiade saamiseks.

Teoreem 1.10. *Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on tautoloogiad, siis ka $\mathcal{B}$ on tautoloogia.*

Teoreem 1.10 järeldub vahetult tautoloogia definitsioonist ja implikatsiooni tõeväärtustabelist.

Kui lausearvutuse valemis $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ lausemuutujad $X_1, \dots, X_n$ asendada vastavalt lausearvutuse valemitega $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$, siis tekib samuti lausearvutuse valem, mida tähistatakse $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$ ja nimetatakse valemite $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ **substitutsiooniks** valemisse $\mathcal{A}$.

Näide 1.11. Kui

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(X, Y, Z) = ((X \vee Y) \sim Z),$$

$$\mathcal{B} = (X \rightarrow Z), \quad \mathcal{C} = (Y \wedge (\neg Z)), \quad \mathcal{D} = X,$$

siis

$$\mathcal{A}(\mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}) = (((X \rightarrow Z) \vee (Y \wedge (\neg Z))) \sim X).$$

Teoreem 1.12 (Substitutsiooniteoreem). *Kui $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ on tautoloogia ja $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ on mis tahes lausearvutuse valemid, siis $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$ on samuti tautoloogia.*

Tõepoolest, kui $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ on tautoloogia, siis valem $\mathcal{A}$ on tõene muutujate $X_1, \dots, X_n$ mis tahes tõeväärtuste korral ja järelikult on valem $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$ samuti tõene valemite $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ mis tahes tõeväärtuste korral, st valem $\mathcal{A}(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$ on tautoloogia.

Teoreem 1.13. *Olgu $\mathcal{B}_1$ lausearvutuse valem, mis tekib valemist $\mathcal{A}_1$, kui seal asendada kas kõik valemi $\mathcal{A}$ esinemised või selle osa esinemisi valemiga $\mathcal{B}$. Siis valem $\mathcal{C} = ((\mathcal{A} \sim \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{B}_1))$ on tautoloogia.*

Tõepoolest, lause $\mathcal{C}$ saab olla väär ainult siis, kui $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ on tõene ja $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{B}_1$ on väär. Kuid selline juht on võimatu, sest siis on valemitel $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ samad tõeväärtused ja vastavalt tõeväärtustabelite koostamise printsiipidele ka valemitel $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{B}_1$, st valem $\mathcal{A}_1 \sim \mathcal{B}_1$ on tõene. Saadud vastuolu tõestabki teoreemi 1.13.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 12 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 1.14. Vaatleme valemite

$$\mathcal{A}_1 = ((X \rightarrow (Y \wedge Z)) \vee ((Y \wedge Z) \sim X)).$$

Selles valemis esineb valem $\mathcal{A} = (Y \wedge Z)$ kaks korda. Asendades valemis $\mathcal{A}_1$ valem $\mathcal{A}$ esimese esinemise valemiga $\mathcal{B} = (X \rightarrow Y)$, saadakse valem

$$\mathcal{B}_1 = ((X \rightarrow (X \rightarrow Y)) \vee ((Y \wedge Z) \sim X)).$$

Teoreemi 1.13 kohaselt on järgmine valem tautoloogia:

$$\begin{aligned} &(((Y \wedge Z) \sim (X \rightarrow Y)) \rightarrow (((X \rightarrow (Y \wedge Z)) \vee ((Y \wedge Z) \sim X)) \sim \\ &\sim ((X \rightarrow (X \rightarrow Y)) \vee ((Y \wedge Z) \sim X))). \end{aligned}$$

1.3. Loogiliselt samaväärsed valemid

Olgu $X_1, \dots, X_n$ lausemuutujad, milledest on moodustatud valemid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$, st $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ ja $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$. Valemite $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ nimetatakse **loogiliselt samaväärseteks**, kui muutujate $X_1, \dots, X_n$ kõigi tõeväärtuste korral valemite $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ tõeväärtused langevad kokku:

$$\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = \mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$$

iga $x_1, \dots, x_n \in \{0, 1\}$ korral. Asjaolu, et valemid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on loogiliselt samaväärsed, tähistatakse $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ (see pole enam lausearvutuse valem, vaid väljendab seost valemite vahel). Ilmselt kehtib

Teoreem 1.15. *Lausearvutuse valemid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on loogiliselt samaväärsed parajasti siis, kui valem $\mathcal{A} \sim \mathcal{B}$ on tautoloogia.*

Seos $\equiv$ on ekvivalentsiseos kõigi valemite hulgal, st kui $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ on suvalised lausearvutuse valemid, siis kehtib:

- 1^0 $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$ (seose $\equiv$ refleksiivsus),
- 2^0 kui $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$, siis $\mathcal{B} \equiv \mathcal{A}$ (seose $\equiv$ sümmeetrilisus),
- 3^0 kui $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ ja $\mathcal{B} \equiv \mathcal{C}$, siis $\mathcal{A} \equiv \mathcal{C}$ (seose $\equiv$ transitiivus).

Loogiliselt samaväärsed võivad olla ka erinevaid lausemuutujaid sisaldavad valemid. Näiteks, kui $\mathcal{A} = X \wedge (Y \vee \neg Y)$ ja $\mathcal{B} = X \wedge (Z \vee \neg Z)$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 13 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$\neg Z$), siis $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$ (lausemuutuja Z on lauses $\mathcal{A}$ nn fiktiivne muutuja, samuti on Y lauses $\mathcal{B}$ fiktiivne muutuja).

Järgnevas loetelus on esitatud tüüpilisemad loogilised samaväärsused, mis on soovitatav meeles pidada:

- 1) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \wedge \mathcal{A}$ (konjunktsiooni kommutatiivsus);
- 2) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$ (konjunktsiooni idempotentsus);
- 3) $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \wedge \mathcal{C} \equiv \mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ (konjunktsiooni assotsiatiivsus);
- 4) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \mathcal{B} \vee \mathcal{A}$ (disjunktsiooni kommutatiivsus);
- 5) $\mathcal{A} \vee \mathcal{A} \equiv \mathcal{A}$ (disjunktsiooni idempotentsus);
- 6) $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \vee \mathcal{C} \equiv \mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$ (disjunktsiooni assotsiatiivsus);
- 7) $\mathcal{A} \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{C})$ (disjunktsiooni distributiivsus konjunktsiooni suhtes);
- 8) $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{B} \vee \mathcal{C}) \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{C})$ (konjunktsiooni distributiivsus disjunktsiooni suhtes);
- 9) $\mathcal{A} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}$ (neelduvuse seadus);
- 10) $\mathcal{A} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv \mathcal{A}$ (neelduvuse seadus);
- 11) $\neg(\neg\mathcal{A}) \equiv \mathcal{A}$;
- 12) $\neg(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{A}) \vee (\neg\mathcal{B})$;
- 13) $\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \equiv (\neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B})$.
- 14) $\mathcal{A} \sim \mathcal{B} \equiv (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \equiv (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$;
- 15) $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \neg(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$;
- 16) $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} \equiv \neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \equiv \neg(\neg\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$;
- 17) $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} \equiv \neg(\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{B}) \equiv \neg(\neg\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{B})$.

Nendes samaväärsustes võib veenduda tõeväärtustabelite abil. Nii näiteks samaväärsused 15) tulenevad järgmisest tabelist:

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	$\neg\mathcal{A}$	$\vee$	$\mathcal{B}$	$\neg$	$(\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{B})$
1	1	1	0	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	0
0	0	1	1	1	0	1	0

Samaväärsused 14)-17) näitavad, et osa loogilisi tehteid on loogiliselt samaväärsed teiste loogiliste tehete kombinatsioonidega. Nimetagem samaväärsusi 1)-17) **põhilisteks loogilisteks samaväärsusteks**.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 14 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Teoreem 1.16. Olgu $\mathcal{B}_1$ lausearvutuse valem, mis tekib valemist $\mathcal{A}_1$, kui seal asendada kas kõik valemi $\mathcal{A}$ esinemised või selle osa esinemisi temaga loogiliselt samaväärse valemiga $\mathcal{B}$. Siis valemid $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{B}_1$ on loogiliselt sama- väärsed.

Teoreem 1.16 järeldub teoreemidest 1.10 ja 1.13. Teoreemi 1.16 kasutatakse antud valemi teisendamiseks selle valemiga loogiliselt samaväärseks valemiks. Seejuures kasutatakse samaväärsusi 1)-17).

Teoreem 1.17. Iga lausearvutuse valemi $\mathcal{A}$ jaoks leidub temaga loogiliselt samaväärne valem, mis ei sisalda loogilisi tehteid $\sim$ ja $\rightarrow$.

Teoreem 1.17 järeldub teoreemist 1.16 ja loogilistest samaväärsustest 14) ja 15).

Näide 1.18. Järgnevalt on teisendatud valem

$$(X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow X_3)) \sim \neg(X_2 \rightarrow X_1)$$

selle valemiga loogiliselt samaväärseks valemiks, nii et saadud valemis puuduvad loogilised tehted $\equiv$ ja $\rightarrow$:

$$\begin{aligned} & (X_1 \rightarrow (X_2 \rightarrow X_3)) \sim \neg(X_2 \rightarrow X_1) \equiv \\ & \equiv (X_1 \rightarrow (\neg X_2 \vee X_3)) \sim (\neg(\neg X_2 \vee X_1)) \equiv \\ & \equiv (\neg X_1 \vee (\neg X_2 \vee X_3)) \sim \neg(\neg X_2 \vee X_1) \equiv \\ & \equiv ((\neg X_1 \vee (\neg X_2 \vee X_3)) \wedge \neg(\neg X_2 \vee X_1)) \vee \\ & \vee (\neg(\neg X_1 \vee (\neg X_2 \vee X_3)) \wedge \neg\neg(\neg X_2 \vee X_1)) \equiv \\ & \equiv ((\neg X_1 \vee (\neg X_2 \vee X_3)) \wedge (\neg X_1 \wedge X_2)) \vee \\ & \vee ((X_1 \wedge (X_2 \wedge \neg X_3)) \wedge (\neg X_2 \vee X_1)). \end{aligned}$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 15 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.4. Duaalsusprintsiiip

Siin alajaotuses vaatleme valemeid, mis sisaldavad lausearvutuse tehetest ainult tehteid $\wedge$, $\vee$ ja $\neg$.

Kui lausearvutuse valemis $\mathcal{A}$ asendada iga sümbol $\wedge$ sümboliga $\vee$, iga sümbol $\vee$ sümboliga $\wedge$ ja iga lausemuutuja X tema eitusega $\neg X$, siis tekkinud lausearvutuse valemit nimetatakse valemiga $\mathcal{A}$ **duaalseks valemiks** ja seda tähistatakse $\mathcal{A}^*$.

Näide 1.19. Valemiga

$$((X \vee \neg Y) \wedge X) \wedge (\neg Z \vee (X \wedge Z))$$

duaalne valem on

$$((\neg X \wedge \neg \neg Y) \vee \neg X) \vee (\neg \neg Z \wedge (\neg X \vee \neg Z)).$$

Teoreem 1.20 (Duaalsusprintsiiip). *Valemid $\mathcal{A}^*$ ja $\neg \mathcal{A}$ on loogiliselt samaväärsed: $\mathcal{A}^* \equiv \neg \mathcal{A}$.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{A}$ mis tahes sümboleid $\wedge$, $\vee$ ja $\neg$ sisaldav valem ning olgu ta moodustatud lausemuutujatest $X_1, \dots, X_n$. Väide tõestatakse induktsiooniga valemis $\mathcal{A}$ sisalduvate tehtemärkide arvu k järgi.

Kui $k = 0$, siis $\mathcal{A} = X_1$ ja $\mathcal{A}^* = \neg X_1 = \neg \mathcal{A}$ ning sel juhul teoreemi väide kehtib. Eeldame, et $k > 0$ ja arvust k väiksema tehtemärkide arvuga valemite jaoks teoreemi väide kehtib. Siis

$$\mathcal{A} = \neg \mathcal{B}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \quad \text{või} \quad \mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$$

mingite valemite $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ korral. Kui $\mathcal{A} = \neg \mathcal{B}$, siis induktsiooni eelduse kohaselt $\mathcal{B}^* \equiv \neg \mathcal{B}$ ja seega

$$\mathcal{A}^* = \neg(\mathcal{B}^*) \equiv \neg(\neg \mathcal{B}) = \neg \mathcal{A}.$$

Kui $\mathcal{A} = \mathcal{B} \wedge \mathcal{C}$, siis induktsiooni eelduse kohaselt $\mathcal{B}^* \equiv \neg \mathcal{B}$ ning $\mathcal{C}^* \equiv \neg \mathcal{C}$ ja seega

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{B}^* \vee \mathcal{C}^* = \neg \mathcal{B} \vee \neg \mathcal{C} \equiv \neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) = \neg \mathcal{A}.$$

Analoogiliselt vaadeldakse juht $\mathcal{A} = \mathcal{B} \vee \mathcal{C}$. Teoreem on tõestatud.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 16 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.5. Disjunktiivne normaalkuju

Rakendades lausearvutust, ei eristata omavahel loogiliselt samaväärseid valemiteid (neid võib teineteisega alati asendada). Kasutades konjunktsiooni assotsiatiivsust, võib mis tahes valemite $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$ konjunktsiooni korral sulud tehete sooritamise järjekorra näitamiseks ära jätta: avaldis

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_k$$

tähistab valemite $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$ konjunktsiooni, sooritatuna mistahes järjekorras. Analoogiliselt tähistab avaldis

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \dots \vee \mathcal{A}_k$$

valemite $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$ disjunktsiooni, sooritatuna mistahes järjekorras. Disjunktsiooni ja konjunktsiooni kommutatiivsuse tõttu võib valemite $\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_k$ ja $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 \vee \dots \vee \mathcal{A}_k$ muuta valemite $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_k$ järjekorda.

Olgu X mis tahes lausemuutuja. Tähistagu järgnevalt X^1 valemite X ja X^0 valemite $\neg X$.

Definitsioon 1.21. Muutujate $X_1, \dots, X_n$ **elementaarkonjunktsiooniks** nimetatakse valemite kujul

$$X_{i_1}^{x_1} \wedge \dots \wedge X_{i_k}^{x_k},$$

kus $x_1, \dots, x_k \in \{1, 0\}$; $i_1, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$ ja iga muutuja esineb selles valemis ülimalt ühe korra. Elementaarkonjunktsiooni nimetatakse **täielikuks**, kui temas esinevad kõik muutujad $X_1, \dots, X_n$.

Definitsioon 1.22. Valemi $\mathcal{A}$ **disjunktiivseks normaalkujuks** nimetatakse valemite $\mathcal{B}$, mis on loogiliselt samaväärne valemiga $\mathcal{A}$ ja mis on avaldatud elementaarkonjunktsioonide disjunktsioonidena.

Näide 1.23. Valemite

$$\mathcal{A} = (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Z)$$

ja

$$\mathcal{B} = (Z \rightarrow X) \rightarrow (X \sim Y)$$

tõeväärtustabelid on

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 17 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

X	Y	Z	$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$
1	1	1	1	1
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1
0	0	0	1	1

Seega on valemid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ loogiliselt samaväärsed ja valem $\mathcal{A}$ on valemi $\mathcal{B}$ disjunktiivne normaalkuju. Ka valem

$$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)$$

on loogiliselt samaväärne valemiga $\mathcal{B}$. Siit järeldub, et valemi disjunktiivne normaalkuju pole üheselt määratud.

Teoreem 1.24. *Iga valemi jaoks, mis pole kontradiktsioon, leidub disjunktiivne normaalkuju.*

Teoreemi 1.24 põhjendame veidi hiljem. Valemi $\mathcal{A}$ disjunktiivse normaalkuju leidmiseks on kaks võimalust: 1) valemi $\mathcal{A}$ järk-järguline teisendamine põhilisi loogilisi samaväärsusi kasutades, 2) valemi $\mathcal{A}$ tõeväärtustabeli abil. Demonstreerime mõlemat võimalust näite varal.

Näide 1.25. Leiame valemi

$$\mathcal{A} = (X \sim Y) \rightarrow Z$$

disjunktiivse normaalkuju, kasutades põhilisi loogilisi samaväärsusi.

a) Kõigepealt kõrvaldame valemist $\mathcal{A}$ loogiliste samaväärsuste 14) ja 15) abil implikatsiooni ja ekvivalentsuse:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= (X \sim Y) \rightarrow Z \equiv ((X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)) \rightarrow Z \equiv \\ &\equiv \neg((X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)) \vee Z. \end{aligned}$$

b) Viime eitused loogiliste samaväärsuste 12) ja 13) abil vahetult lausemuutujate ette ja kaotame kahekordsed eitused loogilise samaväärsusega 11):

$$\mathcal{A} \equiv \neg((X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y)) \vee Z \equiv$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 18 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{aligned} &\equiv (\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y)) \vee Z \equiv \\ &\equiv ((\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Y)) \vee Z. \end{aligned}$$

c) Teisendame disjunktsioonide konjunktsioonid distributiivsuse omaduse 8) põhjal konjunktsioonide disjunktsioonideks:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv ((\neg X \vee \neg Y) \wedge (X \vee Y)) \vee Z \equiv \\ &\equiv ((\neg X \vee \neg Y) \wedge X) \vee ((\neg X \vee \neg Y) \wedge Y) \vee Z \equiv \\ &\equiv (\neg X \wedge X) \vee (\neg Y \wedge X) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg Y \wedge Y) \vee Z. \end{aligned}$$

d) Kuna $\neg X \wedge X$ ja $\neg Y \wedge Y$ on samaselt väärad valemid ja $\mathcal{C} \vee \mathcal{D} \equiv \mathcal{D}$ iga samaselt väära valemi $\mathcal{C}$ ja mis tahes valemi $\mathcal{D}$ korral, siis võib valemid $\neg X \wedge X$ ja $\neg Y \wedge Y$ disjunktsioonides ära jätta:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv (\neg Y \wedge X) \vee (\neg X \wedge Y) \vee Z \equiv \\ &\equiv (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee Z \end{aligned}$$

(veel kasutasime konjunktsiooni kommutatiivsust). Järelikult valemi $\mathcal{A}$ üheks disjunktiivseks normaalkujuks on valem

$$\mathcal{B} = (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee Z.$$

Näide 1.26. Leiame näites 1.25 antud valemi $\mathcal{A}$ disjunktiivse normaalkuju selle valemi tõeväärtustabeli abil. Valemi $\mathcal{A}$ tõeväärtustabel on

X	Y	Z	$\mathcal{A}$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 19 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tabelist on näha kõik lausemuutujate X , Y ja Z tõeväärtused x , y ja z , mille korral $\mathcal{A}(x, y, z) = 1$. Iga sellise vektori (x, y, z) jaoks moodustame elementaarkonjunktsiooni $X^x \wedge Y^y \wedge Z^z$ ning seejärel moodustame saadud elementaarkonjunktsioonide disjunkttsiooni

$$\begin{aligned}\mathcal{C} &= (X^1 \wedge Y^1 \wedge Z^1) \vee (X^1 \wedge Y^0 \wedge Z^1) \vee (X^1 \wedge Y^0 \wedge Z^0) \vee \\ &\vee (X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^1) \vee (X^0 \wedge Y^1 \wedge Z^0) \vee (X^0 \wedge Y^0 \wedge Z^1) = \\ &= (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee \\ &\vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z).\end{aligned}$$

Valem $\mathcal{C}$ on tõene parajasti siis, kui on tõene vähemalt üks temas esinev elementaarkonjunktsioon $X^x \wedge Y^y \wedge Z^z$. Elementaarkonjunktsioon $X^x \wedge Y^y \wedge Z^z$ on tõene aga ainult siis, kui lausemuutujate X , Y ja Z tõeväärtused on vastavalt x , y ja z . Seega on valemid $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{A}$ tõesed lausemuutujate X , Y ja Z ühtede ja samade tõeväärtuste korral, st valemid $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{A}$ on loogiliselt samaväärsed ning $\mathcal{C}$ on valemi $\mathcal{A}$ disjunktiivne normaalkuju.

Teoreemi 1.24 põhjendus. Vaadelgem valemit $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$, mis pole kontradiktsioon. Siis leiduvad lausemuutujate $X_1, \dots, X_n$ sellised tõeväärtused $x_1, \dots, x_n$, mille korral $\mathcal{A}(X_1, \dots, X_n) = 1$. Iga sellise vektori $(x_1, \dots, x_n)$ jaoks moodustame elementaarkonjunktsiooni $X_1^{x_1} \wedge \dots \wedge X_n^{x_n}$ ning seejärel saadud elementaarkonjunktsioonide disjunkttsiooni $\mathcal{C}$. Näitega 1.26 analoogilised arutlused veenavad, et valem $\mathcal{C}$ on valemi $\mathcal{A}$ disjunktiivne normaalkuju.

Definitsioon 1.27. Olgu valem $\mathcal{A}$ moodustatud lausemuutujatest $X_1, \dots, X_n$. Valemi $\mathcal{A}$ disjunktiivset normaalkuju $\mathcal{B}$ nimetatakse **täielikuks disjunktiivseks normaalkujuks**, kui iga selles sisalduv elementaarkonjunktsioon sisaldab kõiki muutujaid $X_1, \dots, X_n$, st on täielik elementaarkonjunktsioon.

Kui tahame valemi $\mathcal{A}$ disjunktiivsest normaalkujust saada täieliku normaalkuju, peab igale elementaarkonjunktsioonile $\mathcal{E}$ iga sealt puuduva muutuja X jaoks lisama konjunktsiooni samaselt tõese vale-

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 20 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

miga $X \vee \neg X$, st elementaarkonjunktsioon $\mathcal{E}$ tuleb asendada valemiga $\mathcal{E} \wedge (X \vee \neg X)$ ehk distributiivsuse tõttu valemiga

$$\mathcal{E} \wedge (X \vee \neg X) \equiv (\mathcal{E} \wedge X) \vee (\mathcal{E} \wedge \neg X).$$

Näide 1.28. Näites 1.25 saadi

$$\mathcal{A} \equiv (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee Z.$$

Siin esimeses elementaarkonjunktsioonis $X \wedge \neg Y$ puudub lausemuutuja Z . Teisendame valemi $X \wedge \neg Y$ sellega loogiliselt samaväärseks valemiks, võttes konjunktsiooni valemiga $Z \vee \neg Z$:

$$\begin{aligned} X \wedge \neg Y &\equiv (X \wedge \neg Y) \wedge (Z \vee \neg Z) \equiv \\ &\equiv (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z). \end{aligned}$$

Analoogiliselt teisendatakse ülejäänud kaks elementaarkonjunktsiooni $\neg X \wedge Y$ ja Z täielike elementaarkonjunktsioonide disjunktsioonideks. Asendades seejärel saadud täielike elementaarkonjunktsioonide disjunktsioonid esialgsesse disjunktiivsesse normaalkujusse, saadakse valem $\mathcal{A}$ täielik disjunktiivne normaalkuju:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee \\ &\vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee \\ &\vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z). \end{aligned}$$

Paneme tähele, et elementaarkonjunktsioonid $X \wedge \neg Y \wedge Z$ ja $\neg X \wedge Y \wedge Z$ esinevad viimases valemis kaks korda. Disjunktsiooni kommutatiivsuse ja idempotentsuse tõttu võib kummastki elementaarkonjunktsioonist jätta alles ainult ühe esinemise. Seega saame valemi $\mathcal{A}$ täielikuks disjunktiivseks normaalkujuks

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &\equiv (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee \\ &\vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z). \end{aligned}$$

Kui ei arvesta elementaarkonjunktsioonide järjekorda tekkinud disjunktsioonides, siis saadud täielik disjunktiivne normaalkuju langeb kokku näites 1.26 saadud valemi $\mathcal{A}$ disjunktiivse normaalkujuga.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 21 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lihtne on veenduda, et valemi täielik disjunktiiivne normaalkuju on üheselt määratud kuni elementaarkonjunktsioonide järjekorra täpsuseni normaalkujus esinevates disjunkttsioonides, kui vaid fikseerida lausemuutujate järjekord elementaarkonjunktsioonides. Valemi disjunktiiivse normaalkuju tähtsus seisneb asjaolus, et sellest on võimalik määrata koheselt, milliste lausemuutujate tõeväärtuste korral on valem tõene. Lisaks disjunktiiivsele normaalkujule saab vaadelda ka valemi $\mathcal{A}$ **konjunktiiivset normaalkuju**. Selleks on valemiga $\mathcal{A}$ loogiliselt samaväärne valem $\mathcal{B}$, mis avaldub nn disjunkttsioonide konjunktsioonina (vrd. ülal toodud väljendiga *konjunktsioonide disjunkttsioon*). Valemi $\mathcal{A}$ konjunktiiivse normaalkuju leidmiseks tuleb leida valemi $\neg\mathcal{A}$ disjunktiiivne normaalkuju $\mathcal{C}$, rakendada sellele normaalkujule eitust ning kasutada seejärel põhilisi loogilisi samaväärsusi 11)–13). Nii saadakse valemiga $\mathcal{A}$ loogiliselt samaväärne valem, mis on konjunktiiivses normaalkujus.

Näide 1.29. Leiame näites 1.25 antud valemi $\mathcal{A}$ konjunktiiivse normaalkuju. Valemi $\mathcal{A}$ tõeväärtustabelist saab eelneva põhjal leida vahetult valemi $\neg\mathcal{A}$ disjunktiiivse normaalkuju:

$$\neg\mathcal{A} \equiv (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$$

Rakendades saadud ekvivalentsi mõlemale poole eitust, saadakse valemi $\mathcal{A}$ konjunktiiivne normaalkuju:

$$\begin{aligned}\mathcal{A} &\equiv \neg(\neg\mathcal{A}) \equiv \neg((X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)) \equiv \\ &\equiv \neg(X \wedge Y \wedge \neg Z) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \equiv \\ &\equiv (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (X \vee Y \vee Z).\end{aligned}$$

1.6. Boole'i funktsioonid

Boole'i ² muutujateks nimetatakse muutujaid, mis võivad omandada ainult väärtusi 0 ja 1.

²George Boole (1815–1864) – inglise matemaatik, kelle kaks loogikaalast tööd *Loogika matemaatiline analüüs* (1847) ja *Mõtlemise reeglid* (1854) avaldasid suurt mõju loogika arengule. Ta lõi *loogika algebra*, mida hiljem hakati kutsuma *Boole'i algebraks*. Sellega andis Boole süsteemse kuju lausearvutusele. Boole ei andnud veel lausearvutusele aksiomaatilist kuju. Samuti ei vaadelnud ta predikaatarvutust.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 22 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Definitsioon 1.30. Boole'i funktsiooniks nimetatakse funktsiooni $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ Boole'i muutujatest $x_1, x_2, \dots, x_n$, mille väärtusteks võivad olla samuti ainult arvud 0 ja 1, st $f(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}$.

Seega Boole'i funktsioon on kujutus

$$f : \{0, 1\}^n \longrightarrow \{0, 1\}.$$

Boole'i funktsiooni nimetatakse vahel ka **tõeväärtusfunktsiooniks**. Erinevaid n muutuja Boole'i funktsioone on parajasti 2^{2^n} tükki. Seega ühe muutuja Boole'i funktsioone on 4, kahe muutuja Boole'i funktsioone on 16 jne.. Tähistame edaspidi selles alajaotuses $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Iga Boole'i funktsioon on antav tema väärtuste tabeliga argumentide erinevate väärtuste korral. Näiteks kolme muutuja Boole'i funktsioon $f(x_1, x_2, x_3)$ on antav tabeliga kujul

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
1	1	1	$f(1, 1, 1)$
1	1	0	$f(1, 1, 0)$
1	0	1	$f(1, 0, 1)$
1	0	0	$f(1, 0, 0)$
0	1	1	$f(0, 1, 1)$
0	1	0	$f(0, 1, 0)$
0	0	1	$f(0, 0, 1)$
0	0	0	$f(0, 0, 0)$

Näide 1.31. Kahe muutuja Boole'i funktsioonidest on tuntumad liitmine ja korrutamine³. Liitmine ja korrutamine hulgal $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ defineeritakse võrdustega

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0, & 1 + 1 &= 0, & 1 + 0 &= 1, & 0 + 1 &= 1, \\ 1 \cdot 1 &= 1, & 1 \cdot 0 &= 0, & 0 \cdot 1 &= 0, & 0 \cdot 0 &= 0. \end{aligned}$$

Need tehted hulgal $\mathbb{B}$ on kommutatiivsed ja assotsiatiivsed ning liitmine ja korrutamine on seotud distributiivsuse seadusega⁴. Seejuures

$$x + x = 0, \quad xx = x$$

³Liitmist tähistatakse $+(x, y)$ asemel $x + y$. Analooiliselt korrutamist tähistatakse $x \cdot y$ või xy .

⁴Algebras on hulk $\mathbb{B}$ tuntud jäägiklassiringina $\mathbb{Z}_2$.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 23 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

iga $x \in \mathbb{B}$ korral.

Näide 1.32. Igale lausearvutuse valemile $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ vastab Boole'i funktsioon $f_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$, mis defineeritakse reeglina

$$f_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n),$$

s.o. $f_{\mathcal{A}}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ võrdub valemi $\mathcal{A}$ tõeväärtusega väärtustusel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Näide 1.33. Valemi $\mathcal{A} = (X \sim Y) \rightarrow Z$ tõeväärtustabel ja funktsiooni $f_{\mathcal{A}}(x, y, z)$ väärtuste tabel ühiselt esitatuna on

x	y	z	$\mathcal{A}(x, y, z)$	$f_{\mathcal{A}}(x, y, z)$
1	1	1	1	1
1	1	0	0	0
1	0	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1
0	0	0	0	0

Näide 1.34. Tähistagem eitusele, konjunktsioonile, disjunktsioonile, implikatsioonile ja ekvivalentsusele vastavaid Boole'i funktsioone vastavalt $f_{\neg}$, $f_{\wedge}$, $f_{\vee}$, $f_{\rightarrow}$, $f_{\sim}$. Lihtne on veenduda, et kõik need funktsioonid on avaldatavad hulgal $\mathbb{B}$ määratud liitmistehte ja korrutamistehte abil järgmiselt:

$$f_{\neg}(x) = 1 + x, \quad f_{\wedge}(x, y) = xy, \quad f_{\vee}(x, y) = x + y + xy,$$

$$f_{\rightarrow}(x, y) = 1 + x + xy, \quad f_{\sim}(x, y) = 1 + x + y.$$

Tähistame funktsiooni $f_{\neg}$ edaspidi ülakriipsuga ja funktsioone $f_{\wedge}$, $f_{\vee}$, $f_{\rightarrow}$, $f_{\sim}$ vastavalt sümbolitega $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$:

$$\bar{x} = 1 + x, \quad x \wedge y = xy, \quad x \vee y = x + y + xy, \quad (1.3)$$

$$x \rightarrow y = 1 + x + xy, \quad x \sim y = 1 + x + y. \quad (1.4)$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 24 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Ilmselt kehtib

Teoreem 1.35. *Lausearvutuse valemid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on loogiliselt samaväärsed parajasti siis, kui $f_{\mathcal{A}} = f_{\mathcal{B}}$.*

Teoreem 1.36. *Iga Boole'i funktsiooni $g(x_1, \dots, x_n)$ jaoks leidub selline lausearvutuse valem $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$, et $g = f_{\mathcal{A}}$.*

Tõestus. Olgu antud Boole'i funktsioon $g(x_1, \dots, x_n)$. Boole'i muutujaid $x_1, \dots, x_n$ võib tõlgendada lausemuutujate $X_1, \dots, X_n$ väärtusena. Tähistame mis tahes lausemuutuja X jaoks

$$X^x = \begin{cases} X, & \text{kui } x = 1, \\ \neg X, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Valem X^x on tõene parajasti siis, kui muutuja X tõeväärtus on x .

Kui funktsioon g on samaselt võrdne nulliga, siis valemiks $\mathcal{A}$ sobib valem

$$\mathcal{A} = (X_1 \wedge \neg X_1) \vee (X_2 \wedge \neg X_2) \vee \dots \vee (X_n \wedge \neg X_n).$$

Seepärast eeldame järgnevalt, et funktsioon g ei võrdu samaselt nulliga.

Igale lausemuutujate $X_1, \dots, X_n$ väärtustusele $x_1, \dots, x_n$, mille korral $g(x_1, \dots, x_n) = 1$, paneme vastavusse elementaarkonjunktsiooni

$$X_1^{x_1} \wedge X_2^{x_2} \wedge \dots \wedge X_n^{x_n}$$

ja moodustame saadud elementaarkonjunktsioonide disjunktsiooni $\mathcal{A}$. Valem $\mathcal{A}$ on tõene parajasti siis, kui on tõene vähemalt üks teda moodustavatest elementaarkonjunktsioonidest $X_1^{x_1} \wedge \dots \wedge X_n^{x_n}$. See on aga tõene vaid siis, kui $X_i^{x_i}$ on tõene iga i väärtuse korral, st muutuja X_i tõeväärtus on x_i iga i korral e. $g(x_1, \dots, x_n) = 1$. Siit järeldub, et $g = f_{\mathcal{A}}$. Teoreem on tõestatud.

Teoreemi tõestusest nähtub ka eeskiri valemi $\mathcal{A}$ konstrueerimiseks.

Näide 1.37. Boole'i funktsiooni $f(x, y)$ väärtuste tabel on

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 25 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

x	y	$f(x, y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

Moodustades muutujate x ja y nende väärtuste jaoks, mille korral $f(x, y) = 1$, elementaarkonjunktsiooni $X^x \wedge Y^y$ ning võttes nende elementaarkonjunktsioonide disjunktsiooni, saame valemi

$$\mathcal{A} = (X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y),$$

mille korral $f = f_{\mathcal{A}}$.

Osutub, et iga Boole'i funktsioon avaldub liitfunktsioonina funktsioonidest $f_{\neg}$, $f_{\wedge}$, $f_{\vee}$, $f_{\rightarrow}$ ja $f_{\sim}$.

Definitsioon 1.38. Boole'i funktsioonide

$$f(x_1, \dots, x_n), f_1(x_1, \dots, x_{k_1}), \dots, f_n(x_1, \dots, x_{k_n})$$

superpositsiooniks nimetatakse funktsiooni

$$f(f_1(x_{11}, \dots, x_{1k_1}), \dots, f_n(x_{n1}, \dots, x_{nk_n})),$$

st funktsiooni, mis tekib funktsioonist $f(x_1, \dots, x_n)$ tema argumentide $x_1, \dots, x_n$ asendamisel funktsioonide $f_1, \dots, f_n$ väärtustega minigite argumentide väärtuste korral. Saadud funktsiooni nimetatakse ka **liitfunktsiooniks** funktsioonidest $f, f_1, \dots, f_n$ ja seda tähistatakse $f(f_1, \dots, f_n)$.

Näide 1.39. Funktsioon $f(x, y) = xy + y$ on funktsioonide $g(x, y) = x + y$, $f_1(x, y) = xy$ ja $f_2(x) = x$ superpositsioon:

$$f(x, y) = xy + y = g(xy, y) = g(f_1(x, y), f_2(y)).$$

Näide 1.40. Konstantne funktsioon $f(x) = 1$ avaldub funktsioonide $f_{\neg}$, $f_{\wedge}$ ja $f_{\vee}$ superpositsioonina:

$$f(x) = 1 = 1 + 0 + 0 = 1 + (x + x) + (x + x) = (x + (1 + x)) + (x + x) =$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 26 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{aligned}
&= x + (1 + x) + x(1 + x) = x + f_{\neg}(x) + x \cdot f_{\neg}(x) = \\
&= (x \vee f_{\neg}(x)) \vee (x \wedge f_{\neg}(x)) = \\
&= f_{\vee}(f_{\vee}(x, f_{\neg}(x)), f_{\wedge}(x, f_{\neg}(x))).
\end{aligned}$$

Ilmselt kehtib

Teoreem 1.41. Kui $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$ ja $\mathcal{C} = \mathcal{C}(X_1, \dots, X_n)$ on mis tahes lausearvutuse valemid, siis

$$\begin{aligned}
f_{\neg\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) &= \overline{f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)} = \overline{f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n)}, \\
f_{\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n) &= f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \wedge f_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n), \\
f_{\mathcal{B}\vee\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n) &= f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \vee f_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n), \\
f_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n) &= f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \rightarrow f_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n), \\
f_{\mathcal{B}\sim\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n) &= f_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) \sim f_{\mathcal{C}}(x_1, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

st

$$\begin{aligned}
f_{\neg\mathcal{B}} &= \overline{f_{\mathcal{B}}}, \quad f_{\mathcal{B}\wedge\mathcal{C}} = f_{\mathcal{B}} \wedge f_{\mathcal{C}}, \quad f_{\mathcal{B}\vee\mathcal{C}} = f_{\mathcal{B}} \vee f_{\mathcal{C}}, \\
f_{\mathcal{B}\rightarrow\mathcal{C}} &= f_{\mathcal{B}} \rightarrow f_{\mathcal{C}}, \quad f_{\mathcal{B}\sim\mathcal{C}} = f_{\mathcal{B}} \sim f_{\mathcal{C}}.
\end{aligned}$$

Kuna iga Boole'i funktsiooni f jaoks leidub selline valem $\mathcal{A}$, et $f_{\mathcal{A}}$, siis teoreemist 1.41 järeldub (induktsiooniga tehtemärkide arvu järgi)

Teoreem 1.42. Iga Boole'i funktsioon avaldub superpositsioonina funktsioonidest $f_{\neg}, f_{\wedge}, f_{\vee}, f_{\rightarrow}, f_{\sim}$.

Teoreem 1.43. Iga Boole'i funktsioon avaldub liitfunktsioonina

- 1) Boole'i funktsioonidest $f_{\neg} = \neg$ ja $f_{\wedge} = \wedge$,
- 2) Boole'i funktsioonidest $f_{\neg} = \neg$ ja $f_{\vee} = \vee$,
- 3) Boole'i funktsioonidest $f_{\neg} = \neg$ ja $f_{\rightarrow} = \rightarrow$,
- 4) nn **Webb'i** noolest $\downarrow$, mis defineeritakse võrdusega

$$x \downarrow y = \bar{x}\bar{y} = 1 + x + y + xy,^5$$

- 5) nn **Sheffer'i** kriipsust $|$, mis defineeritakse võrdusega

$$x | y = \bar{x} \vee \bar{y} = 1 + xy.^6$$

⁵ $x \downarrow y = f_{\mathcal{A}}$, kus $\mathcal{A} = X \downarrow Y = \neg X \wedge \neg Y$.

⁶ $x | y = f_{\mathcal{A}}$, kus $\mathcal{A} = X | Y = \neg X \vee \neg Y$.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 27 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tõestus. 1) Kuna

$$X \vee Y \equiv \neg(\neg X \wedge \neg Y),$$

$$X \rightarrow Y \equiv \neg(X \wedge \neg Y),$$

$$X \sim Y \equiv \neg(\neg(X \wedge Y) \wedge \neg(\neg X \wedge \neg Y)),$$

siis teoreemide 1.41 ja 1.42 põhjal iga Boole'i funktsioon avaldub liit-funktsioonina funktsioonidest $f_{\neg}$ ja $f_{\wedge}$.

2) Väide järeldub seose

$$X \wedge Y \equiv \neg(\neg X \vee \neg Y)$$

põhjal teoreemidest 1.41 ja 1.42 ning juba tõestatud väitest 1).

3) Väide järeldub seose

$$X \wedge Y \equiv \neg(X \rightarrow \neg Y)$$

põhjal teoreemidest 1.41 ja 1.42 ning juba tõestatud väitest 1).

4) Väide järeldub seoste

$$\neg X \equiv (X \downarrow X), \quad X \wedge Y \equiv ((X \downarrow X) \downarrow (Y \downarrow Y))$$

põhjal tõestatud väitest 1).

5) Väide järeldub seoste

$$\neg X \equiv (X \mid X), \quad X \vee Y \equiv ((X \mid X) \mid (Y \mid Y))$$

põhjal tõestatud väitest 2). Teoreem on tõestatud.

Teoreemist 1.42 ja valemeist (1.3) ning (1.4) järeldub

Teoreem 1.44. Iga Boole'i funktsiooni f väärtus $f(x_1, \dots, x_n)$ on saadav elemendist 1 ja muutujatest $x_1, \dots, x_n$ liitmis- ja korrutamistehte abil hulgas $\mathbb{B} = \{0, 1\}$.

Näide 1.45. Avaldame tabeliga

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 28 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

antud funktsiooni väärtused $f(x, y, z)$ liitmis- ja korrutamistehte abil avaldistena muutujatest x, y, z ja arvust 1. Tabelist selgub, et $f = f_A$, kus

$$\mathcal{A} = (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z).$$

Seega

$$\begin{aligned}
 f(x, y, z) &= f_A(x, y, z) = (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) = \\
 &= (x\bar{y}z) \vee (x\bar{y}\bar{z}) \vee (\bar{x}y\bar{z}) = (x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x^2\bar{y}^2z\bar{z}) \vee (\bar{x}y\bar{z}) = \\
 &= (x\bar{y}z + x\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}z\bar{z}) \vee (\bar{x}y\bar{z}) = (xz(1 + y) + x(1 + y)(1 + z) + \\
 &+ xz(1 + y)(1 + z)) \vee ((1 + x)y(1 + z)) = (xz + xyz + x + xy + \\
 &+ xz + xyz + xz + xyz + xz + xyz) \vee (y + xy + yz + xyz) = \\
 &= (x + xy) \vee (y + xy + yz + xyz) = x + xy + y + xy + yz + xyz + \\
 &+ (x + xy)(y + xy + yz + xyz) = x + xy + y + xy + yz + \\
 &+ xyz + xy + xy + xyz + xyz + xy + xy + xyz + xyz = \\
 &= x + y + yz + xyz.
 \end{aligned}$$

Märgime, et teisendusi tehes kasutasime korduvalt samasusi $xx = x$ ja $x + x = 0$.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 29 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.7. Ülesandeid

Ülesannetes 1.1–1.4 taastada sulud.

$$1.1 \quad \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \equiv \mathcal{A}.$$

$$1.2 \quad \mathcal{D} \sim \mathcal{C} \sim \mathcal{A} \wedge \mathcal{D} \wedge \mathcal{B} \vee \neg \mathcal{D}.$$

$$1.3 \quad \mathcal{C} \rightarrow \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge \mathcal{A} \sim \mathcal{B}.$$

$$1.4 \quad \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A} \sim \neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B}.$$

Ülesannetes 1.5–1.12 koostada antud valemi tõeväärtustabel.

$$1.5 \quad ((X \rightarrow (Y \wedge Z)) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow \neg Y.$$

$$1.6 \quad ((X \vee Y) \wedge ((Y \vee Z) \wedge (Z \vee X))) \rightarrow ((X \wedge Y) \wedge Z).$$

$$1.7 \quad ((X \vee Y) \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \wedge (X \rightarrow Z).$$

$$1.8 \quad (((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow \neg Y.$$

$$1.9 \quad ((X \vee Z) \rightarrow (Y \rightarrow \neg Z)) \rightarrow X.$$

$$1.10 \quad ((X \wedge Z) \rightarrow (\neg(X \vee Z) \wedge Y)).$$

$$1.11 \quad ((X \rightarrow Y) \vee (Z \rightarrow \neg X)) \wedge (\neg Y \rightarrow \neg Z).$$

$$1.12 \quad ((X \rightarrow Z) \wedge Y) \vee (\neg(X \wedge Z) \vee Y).$$

Ülesannetes 1.13–1.27 tõestada, et kui $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ on mis tahes lausearvutuse valemid, siis antud lausearvutuse valem on tautoloogia.

$$1.13 \quad \mathcal{A} \vee \neg \mathcal{A}.$$

$$1.14 \quad \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}.$$

$$1.15 \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}).$$

$$1.16 \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})).$$

$$1.17 \quad (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})).$$

$$1.18 \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}.$$

$$1.19 \quad (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}.$$

$$1.20 \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})).$$

$$1.21 \quad \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}).$$

$$1.22 \quad \mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}).$$

$$1.23 \quad (\neg \mathcal{A} \rightarrow \neg \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}).$$

$$1.24 \quad (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}) \rightarrow ((\neg \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}).$$

$$1.25 \quad (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\mathcal{C} \vee \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{C} \vee \mathcal{B})).$$

$$1.26 \quad ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}.$$

$$1.27 \quad \neg \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}).$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 30 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.28 Leida lausearvutuse valemi

$$(X \vee Y) \wedge (Z \wedge \neg Y) \wedge \neg(X \vee Z)$$

jaoks temaga loogiliselt samaväärne valem, mis sisaldab tehtemärki-dena ainult eitust ja implikatsiooni.

1.29 Leida lausearvutuse valemi

$$((X \vee \neg Y) \wedge Z) \sim (X \wedge Y \wedge Z)$$

jaoks temaga loogiliselt samaväärne valem, mis sisaldab tehtemärki-dena ainult eitust ja disjunktsiooni.

1.30 Leida lausearvutuse valemi

$$(X \vee \neg Y) \sim (Y \wedge Z)$$

jaoks temaga loogiliselt samaväärne valem, mis sisaldab tehtemärki-dena ainult eitust ja implikatsiooni.

1.31 Leida lausearvutuse valemi

$$\neg(X \vee Z) \wedge (X \sim Y)$$

jaoks temaga loogiliselt samaväärne valem, mis sisaldab tehtemärki-dena ainult eitust ja implikatsiooni.

1.32 Leida lausearvutuse valemi

$$(X \vee (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (\neg X \wedge Y)$$

jaoks temaga loogiliselt samaväärne valem, mis sisaldab tehtemärki-dena ainult eitust ja konjunktsiooni.

1.33 Leida lausearvutuse valemi

$$(X \vee \neg Y) \sim (Y \rightarrow Z)$$

jaoks temaga loogiliselt samaväärne valem, mis sisaldab tehtemärki-dena ainult eitust ja konjunktsiooni.

Ülesannetes 1.34-1.37 leida antud valemiga loogiliselt samaväärne valem, mis on võimalikult lihtsa kujuga. Teha seda loogilisi põhisama-susi kasutades.

Autori koduleht

Täitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 31 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$1.34 \quad ((X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \rightarrow \neg X)) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg Z).$$

$$1.35 \quad (((X \rightarrow Y) \rightarrow \neg X) \rightarrow \neg Y) \rightarrow \neg Z \rightarrow Z.$$

$$1.36 \quad ((X \vee Y) \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \wedge (X \rightarrow Z).$$

$$1.37 \quad (((X \rightarrow Y) \rightarrow Z) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)) \rightarrow \neg Y.$$

Ülesannetes 1.38–1.42 viia antud valem täielikule disjunktiiivsele normaalkujule.

$$1.38 \quad X \sim (\neg X \wedge Y).$$

$$1.39 \quad (X_1 \wedge X_2) \rightarrow (\neg X_2 \wedge X_3).$$

$$1.40 \quad (\neg X_1 \rightarrow \neg X_2) \sim (X_2 \sim X_3).$$

$$1.41 \quad ((X_1 \rightarrow X_2) \rightarrow (X_3 \rightarrow \neg X_1)) \rightarrow (\neg X_2 \rightarrow \neg X_3).$$

$$1.42 \quad (X \rightarrow Y) \vee (\neg X \wedge Z).$$

Ülesannetes 1.43–1.47 viia antud valem konjunktiivsele normaalkujule.

$$1.43 \quad (X_1 \wedge X_2) \rightarrow (\neg X_2 \wedge X_3).$$

$$1.44 \quad ((X_1 \rightarrow X_2) \rightarrow (X_3 \rightarrow \neg X_1)) \rightarrow (\neg X_2 \rightarrow \neg X_3).$$

$$1.45 \quad (X \rightarrow Y) \vee (\neg X \wedge Z).$$

$$1.46 \quad ((X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \rightarrow \neg X)) \rightarrow (\neg Y \rightarrow \neg Z).$$

$$1.47 \quad ((X \vee Y) \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \wedge (X \rightarrow Z).$$

Ülesannetes 1.48 ja 1.49 leida valem $\mathcal{A}$ nii, et $f = f_{\mathcal{A}}$, kui funktsioon f on antud tabeliga.

1.48

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

1.49

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	1

1.50 Avaldada ülesannetes 1.48 ja 1.49 antud funktsioonide väärtused $f(x, y, z)$ liitmis- ja korrutamistehte abil avaldistena muutujatest x, y, z ja arvust 1.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 32 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Ülesannetes 1.51–1.57 avaldada antud Boole'i funktsioon liitmise ja korrutamise kaudu.

1.51

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	0

1.52

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

1.53

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

1.54

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

1.55

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

1.56

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 33 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.57

x	y	z	$f(x, y, z)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

1.58 Näidata, et kui $g(x, y)$ on kahe muutuja Boole'i funktsioon, millest liitfunktsioonide moodustamise teel saab kätte kõik Boole'i funktsioonid, siis g on kas Webb'i nool või Shefferi kriips.

1.59 Näidata, et funktsioonidest $\neg$ ja $\sim$ ei saa liitfunktsioonide moodustamise teel kõiki Boole'i funktsioone.

1.60 Näidata, et funktsioonidest $\rightarrow$ ja $\vee$ ei saa liitfunktsioonide moodustamise teel kõiki Boole'i funktsioone.

1.61 Vaadelgem kolme väidet:

Kui John ei kohanud sel öösel Smithi, siis Smith on mõrvar või John valetab.

Kui Smith pole mõrvar, siis John ei kohanud sel öösel Smithi ja mõrv toimus pärast keskööd.

Kui mõrv toimus pärast keskööd, siis Smith on mõrvar või John valetab.

Juhul, kui need väited vastavad tõe, kas võib järeldada, et Smith on mõrvar?

1.62 Vaadelgem kolme väidet:

Kui kapitalimahutused ei muutu, siis kasvavad valitsuskulud ja tekib tööpuudus.

Kui valitsuskulud ei kasva, siis maksed vähenevad.

Kui maksed vähenevad ja kapitalimahutused ei muutu, siis tööpuudust ei teki.

Juhul, kui need väited vastavad tõe, kas võib järeldada, et valitsuskulud kasvavad?

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 34 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.63 Veidrimaal elavatest inimestest osa räägib ainult tõtt, ülejäänud aga alati valetavad. Küsimustele vastavad Veidrimaa inimesed alati lühidalt kas "ja" või "ei". Veidrimaal viibiv turist jõudis märgistamata teeristile, mille üks haru viis Veidrimaa pealinna, teine aga mitte. Teeristil puhkas piipu tõmbav kohalik elanik Vidrik. Millise vastust "ja" või "ei" nõudva küsimuse pidi turist Vidrikule esitama, et teha kindlaks kumb tee haru viib Veidrimaa pealinna?

[Autori koduleht](#)[Tiitelleht](#)

Lk 35 / 247

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

2. PREDIKAATARVUTUS

Lausearvutuses vaadeldakse lihtsa kujuga lauseid ja nendest lausearvutuse tehetega moodustatud liitlauseid. Matemaatikas toimuvate arutluste jälgimiseks sellest ei piisa. Predikaatarvutuses võetakse lisaks lausearvutuse vahenditele kasutusele predikaadid ja kvantorid ning funktsionaalsümbolid. See võimaldab uurida keerukamaid loogilisi arutlusi. Käesolevas peatükis tutvumegi predikaatarvutuse põhimõistetega.

2.1. Predikaadid ja kvantorid

Vaatleme näitena kolme lauset:

Kõik päevad aastas on esmaspäevad.

Mari ja Jaan on omavahel abielus.

Kaarepere asub Jõgeva ja Tabivere vahel.

Alustame esimese lause analüüsist ja konkreetseuse mõttes eeldame, et vaatluse all on 1999.aasta. Selle lause sümbolkujul kirjapanemiseks tähistagu sümbol x mis tahes vaadeldavat päeva aastas ja sümbol P päeva omadust olla esmaspäev. Siis asjaolu, et x on omadusega P , tähistatakse kujul $P(x)$. Teiste sõnadega, lause " x on esmaspäev" on tähistatud kujul $P(x)$. Kalendrit vaadates selgub, et lause $P(4.jaan.)$ on tõene, lause $P(5.jaan.)$ aga väär.

Teise lause sümbolkujul kirjapanemiseks tähistame sümbolitega $x, y, \dots$ vaadeldavaid inimesi ja sümboliga A omadust olla abielus. Avaldis $A(x, y)$ tähistagu lauset " x ja y on omavahel abielus". Teine lause ülalt on sümbolkujul $A(Mari, Jaan)$. Ka siin lause $A(Mari, Jaan)$ võib olla nii tõene kui ka väär, sest Mari on tegelikult abielus võib-olla hoopis Toomasega.

Kolmanda lause sümbolkujul avaldamiseks tähistagu $x, y, \dots$ Eesti Vabariigi raudteejaamu ja Q kolme jaama x, y, z omadust, et jaam y asub jaamade x ja z vahel, st $Q(x, y, z)$ tähendab lauset " $Jaam y$ asub jaamade x ja z vahel". Lause $Q(Kaarepere, Jõgeva, Tabivere)$ on väär, lause $Q(Jõgeva, Kaarepere, Tabivere)$ aga tõene.

Kõigi nende kolme näite korral ühine on, et vaadeldakse mingit objektide hulka M ja selle hulga elementide mingit omadust (esimene

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 36 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

lause) või seost selle hulga elementide vahel (teine ja kolmas lause). Esimese lause puhul hulgaks M on päevade hulk vaadeldavas aastas, teises lauses on selleks inimeste hulk vaadeldavas piirkonnas (külas, linnas), kolmandas lauses aga Eesti Vabariigi kõigi raudteejaamade hulk.

Järgnevalt asume käsitlema üldjuhtu. Olgu M mingi mittetühi hulk. Predikaatarvutuses on kujunenud tavaks vaadeldava hulga M elemente nimetada **indiviidideks**. Muutujad indiviidide tähistamiseks olgu $x, y, \dots, x_1, x_2, \dots$

Definitsioon 2.1. Omadust P , mis sõltub n indiviidist $x_1, \dots, x_n \in M$, nimetatakse **n -kohaliseks** ehk **n -aarseks predikaadiks** hulgal M . Lauset "*Indiviidid $x_1, \dots, x_n$ on omadusega P* " tähistatakse $P(x_1, \dots, x_n)$.

Ühekohaline predikaat $P(x)$ tähendab asjaolu, et indiviid x on omadusega P . Kuna lause $P(x_1, \dots, x_n)$ võib olla nii tõene kui ka väär, siis võib n -kohalist predikaati P vaadelda ka kui kujutust

$$P : M^n \longrightarrow \{0, 1\},^7 \quad (2.1)$$

kus 0 ja 1 tähistavad tõeväärtusi. Edaspidi vaatlemegi n -kohalist predikaati P hulgal M kujutusena (2.1).

Predikaadi P **tõesuspiirkonna** all mõistetakse hulka

$$T_P = \{ (x_1, \dots, x_n) \in M^n \mid P(x_1, \dots, x_n) = 1 \}.$$

Siis $M^n \setminus T_P$ on piirkond, kus predikaat P on väär. Vastupidi, kui A on hulga M^n mis tahes alamhulk, siis leidub predikaat P nii, et $T_P = A$:

$$P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{kui } (x_1, \dots, x_n) \in A, \\ 0, & \text{kui } (x_1, \dots, x_n) \in M^n \setminus A. \end{cases}$$

Kuna predikaadid on muutujaid sisaldavad laused, siis saab nendega teostada lausearvutusest tuntud tehteid $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \sim$. Tulemusena saadakse liitlaused, mis sisaldavad predikaate.

⁷ M^n tähistab otsekorrutist $M \times M \times \dots \times M$ (n korda).

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 37 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 2.2. Olgu vaadeldavaks indiviidide hulgaks M kõigi reaalarvude hulk $\mathbb{R}$. Vaadelgem hulgal $\mathbb{R}$ kahekohalist predikaati P ja kolmekohalist predikaati K järgneva tähendusega:

$$P(x, y) : x \leq y,$$

$$K(x, y, z) : xy = z.$$

Siis saab moodustada liitlause

$$\mathcal{A} = K(x, x, y) \wedge P(y, x).$$

Lause $\mathcal{A}$ tähendab, et $x^2 = y$ ja $y \leq x$. Lause $\mathcal{A}$ sõltub kahest indiviidist x ja y ning on tõene selliste indiviidipaaride (x, y) korral, kus $0 \leq x \leq 1$, $y = x^2$. Valemit $\mathcal{A}$ võib vaadelda kahekohalise predikaadina $\mathcal{A}(x, y)$ ehk funktsioonina

$$\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \{0, 1\}.$$

Selle predikaadi tõesuspiirkond on

$$T_{\mathcal{A}} = \{ (x, y) \mid x \in [0; 1], y = x^2 \}.$$

Valemit $\mathcal{A}$ tähistatakse lühidalt $\mathcal{A} = K \wedge P$. Analoogiliselt tähistatakse ka antud predikaatidest ülejäänud loogiliste tehetega saadud uusi predikaate.

Teoreem 2.3. Kui P ja Q on indiviidide hulgal M määratud n -kohalised predikaadid, siis

$$T_{\neg P} = M^n \setminus T_P, \quad T_{P \wedge Q} = T_P \cap T_Q, \quad T_{P \vee Q} = T_P \cup T_Q,$$

$$T_{P \rightarrow Q} = M^n \setminus (T_P \setminus T_Q),$$

$$T_{P \sim Q} = (T_P \cap T_Q) \cup (M^n \setminus (T_P \cup T_Q)).$$

Teoreemi 2.3 tõestuse jätame lugejale.

Lisaks predikaatidele võetakse kasutusele nn **kvantorid**, st sümboolid $\forall$ ja $\exists$, mis tähistavad vastavalt sõnu "*iga*" ja "*leidub*". Täpsemalt, kui $P(x_1, \dots, x_n)$ on n -kohaline predikaat, siis avaldis

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 38 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$\forall x_i P(x_1, \dots, x_n)$ tähendab lauset "Iga x_i korral (vaadeldavate indiviidide hulgast) $P(x_1, \dots, x_n)$ " ($1 \leq i \leq n$). Avaldis $\exists x_i P(x_1, \dots, x_n)$ tähendab lauset "Leidub selline x_i (vaadeldavate indiviidide hulgast) nii, et $P(x_1, \dots, x_n)$ ". Seega

$$\forall x_i P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{kui } (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in T_P \\ & \text{iga } x \in M \text{ korral,} \\ 0, & \text{vastasel juhul,} \end{cases}$$

$$\exists x_i P(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 1, & \text{kui leidub selline } x \in M, \text{ et} \\ & (x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n) \in T_P, \\ 0, & \text{vastasel juhul.} \end{cases}$$

Kvantorit $\forall$ nimetatakse **üldisuse kvantoriks** ja kvantorit $\exists$ nimetatakse **olemasolu kvantoriks**. Olgu märgitud, et $\forall x_i P(x_1, \dots, x_n)$ ja $\exists x_i P(x_1, \dots, x_n)$ on omakorda predikaadid ($(n-1)$ -kohalised) ja neile võib samuti rakendada kvantoreid.

Näide 2.4. Vaadeldes veelkord käesoleva paragrahvi alguses toodud esimese lausega seotud predikaati $P(x)$, võime öelda, et avaldis $\forall x P(x)$ tähendab lauset "Iga päev on esmaspäev". See lause on väär. Avaldis $\exists x P(x)$ tähendab lauset "Leidub päev, mis on esmaspäev". See lause on tõene. Teise lausega seotud predikaadi $A(x, y)$ korral avaldis $\exists y A(\text{Mari}, y)$ tähendab lauset "Leidub inimene y , kellega Mari on abielus" ehk lauset "Mari on abielus". See lause võib olla nii tõene kui ka väär.

Kvantoreid võib mitmekohalistele predikaatidele korduvalt rakendada.

Näide 2.5. Vaatleme eelmises näites käsitletud predikaati $A(x, y)$. Lause $\exists y A(x, y)$ jääb sõltuma indiviidist x , st see lause on omakorda ühekohaline predikaat vaadeldavate indiviidide hulgal ja sellele võib samuti rakendada kvantoreid. Nii näiteks saame lause $\forall x \exists y A(x, y)$, mis tähendab lauset "Iga x jaoks leidub y , kellega ta on abielus" ehk lauset "Kõik vaadeldavad isikud on abielus."

Käesoleva alajaotuse lõpuks märgime, et kahekohalise predikaadi P korral tähistuse $P(x, y)$ asemel kasutatakse sageli tähistust xPy .

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 39 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Nii näiteks on järjestusseos reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$ kahekohaline predikaat ja sel korral on üldtuntud tähistus $x \leq y$. Analoogiliselt on võrdukses mis tahes hulgal M kahekohaline predikaat ja sel korral kasutatakse tähist $x = y$.

2.2. Funktsioonid

Eelmises alajaotuses veendusime, et sobiv on kasutada predikaadi ja sellega seotud kvantorite mõisteid. Lisaks predikaatidele on vajalik vaadelda ka funktsioone vaadeldaval indiviidide hulgal M . Funktsioon on aga aritmeetikast tuntud tehte mõiste üldistus.

Definitsioon 2.6. n -kohaliseks ehk n -aarseks funktsiooniks hulgal M nimetatakse kujutust $f : M^n \rightarrow M$, kus M^n tähistab otsekorrutist

$$M^n = \underbrace{M \times M \times \dots \times M}_n = \{ (a_1; a_2; \dots; a_n) \mid a_1, \dots, a_n \in M \}.$$

n korda

Seega on n -aarne funktsioon hulgal M reegel, mis igale kindlas järjekorras võetud n elemendile $x_1, \dots, x_n$ hulgast M paneb vastavusse ühe elemendi $f(x_1, \dots, x_n)$ samast hulgast M . Vaadeldakse ka 0-aarseid ehk nullkohalisi funktsioone. Nullaarse funktsiooni all mõistetakse kokkuleppeliselt ühe kindla elemendi fikseerimist hulgast M . Nullaarset funktsiooni tähistatakse sama sümboliga, millega tähistatakse seda elementi hulgast M , mille see nullaarne funktsioon fikseerib hulgast M . Näiteks maatriksite hulgas nullaarseks tehteks võib lugeda ühikmaatriksi fikseerimist. Ka nullmaatriksit saab käsitleda kui nullaarset funktsiooni maatriksite hulgal. Mõnikord nimetatakse n -aarset funktsiooni hulgal M ka **n -aarseks** ehk **n -kohaliseks tehteks** sellel hulgal M . Eriti kehtib öeldu juhul $n = 2$. Nii näiteks liitmistehe reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$ on kahekohaline funktsioon hulgal $\mathbb{R}$. Kahekohaliste tehete korral kasutatakse tähise $f(x, y)$ asemel enamasti tähist $x f y$ (meenutagem aritmeetikast tuntud tähistusi $x + y$, $x : y$, $x \cdot y$ jne.).

Matemaatiliste arutluste sümbolkujul esitamiseks vajatakse predikaate, kvantoreid ja funktsioone samaaegselt kombineeritud kujul.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 40 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 2.7. Olgu indiviidide hulgaks naturaalarvude hulk $\mathbb{N}$. Vaatleme hulgal $\mathbb{N}$ funktsioone $+$ ja $\cdot$ ning predikaati $=$. Paneme sümbolkujul kirja järgmised hulgal $\mathbb{N}$ vaadeldavad laused:

$\mathcal{A}$: Liitmine on kommutatiivne.

$\mathcal{B}$: Arv x jagub arvuga z .

$\mathcal{C}$: Arv x on paarisarv.

Lauset $\mathcal{A}$ võib sümbolkujul esitada nii avaldisega $\mathcal{A} = \forall x \forall y (x + y = y + x)$ kui ka avaldisega $\mathcal{A} = \forall x \forall y \forall z ((x + y = z) \rightarrow (y + x = z))$. Lauseid $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ võib aga avaldada järgmiselt:

$$\mathcal{B} = \exists y (x \cdot y = z), \quad \mathcal{C} = \exists y (y + y = x).$$

Funktsiooni mõistest võiks ka põhimõtteliselt loobuda, sest igale n -kohalisele funktsioonile $f : M^n \longrightarrow M$ vastab loomulikul viisil $(n+1)$ -kohaline predikaat P_f hulgal M :

$$P(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = 1 \iff f(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1}.$$

Predikaat P_f on omadusega

$$(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}), (x_1, \dots, x_n, y_{n+1}) \in T_{P_f} \implies x_{n+1} = y_{n+1}. \quad (2.2)$$

Vastupidi, kui hulgal M on antud $(n+1)$ -kohaline predikaat P omadusega (2.2), siis defineerides

$$f(x_1, \dots, x_n) = x_{n+1},$$

saadakse hulgal M määratud n -kohaline funktsioon f , mille korral $P_f = P$. Siiski on mugavam kasutada arutlustes mõlemaid, nii predikaate kui ka funktsioone.

2.3. Esimest järku keeled

Siin alajaotuses vaatleme keelelisi vahendeid, mis on vajalikud matemaatiliste väidete avaldamiseks sümbolkujul. Väidet sümbolkujul esitatuna nimetatakse matemaatilises loogikas *valemiks*. Me vaatleme ainult reegleid, kuidas valemid on konstrueeritud seda moodustavatest sümbolitest, st vaatleme valemite keele **süntaksit**. Valemite

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 41 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

sisulist tähendust ehk **semantik**at vaatleme järgmises alajaotuses, interpreteerides valemid konkreetsetel matemaatilistel struktuuridel. Kuna valemid moodustatakse sümbolitest teatud reeglite alusel, siis analoogia tõttu keeltega nimetatakse saadud reeglistikku **keeleks**, täpsemalt **esimest järku keeleks**. Sõnapaar "esimest järku" on võetud kasutusele tähenduses, et kvantoreid kasutatakse ainult indiviidmuutujate jaoks. Kui kvantoreid on võetud ka predikaatide järgi, siis räägitakse juba kõrgemat järku keelest.

Esimest järku keele tähestiku koostisosad on:

- 1) konstantsümbolite hulk $\mathcal{K}$,
- 2) funktsionaalsümbolite hulk $\mathcal{F}$,
- 3) predikaatsümbolite hulk $\mathcal{P}$,
- 4) indiviidmuutujad: $x, y, z, \dots, x_1, x_2, \dots$
- 5) loogilised sümbolid: $\neg \wedge \vee \rightarrow \sim \forall \exists$,
- 6) piirajad: sulud $()$ ja koma $,$.

Esimest järku keeled erinevad üksteisest hulkade $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{P}$ poolest, ülejäänud sümbolid (indiviidmuutujad, loogilised sümbolid ja piirajad) on neil ühised. Iga funktsionaal- ja predikaatsümboli jaoks peab olema teada ka ta kohtade arv (sageli tähistatakse seda indeksina vastava sümboli juures).

Definitsioon 2.8. Kolmikut $\sigma = \langle \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ nimetatakse vaadeldava esimest järku keele **signatuuriks**.

Näide 2.9. Aritmeetika formaliseerimisel kasutatakse esimest järku keelt, milles $\mathcal{K} = \{0, 1\}$, $\mathcal{F} = \{+, \times\}$, $\mathcal{P} = \{=\}$.

Sümbolite hulgad $\mathcal{K}$, $\mathcal{F}$ ja $\mathcal{P}$ võivad olla nii lõplikud kui ka lõpmatud, kuid nad peavad olema omavahel ühisosata. Nõutakse, et predikaatsümbolite hulk pole tühi, sest vastasel juhul ei saa me järgnevalt defineerida valemi mõistet.

Valemi mõiste defineerimiseks vajatakse *termi* mõistet. Termid tähistavad avaldisi, mis kuuluvad indiviidide piirkonda, st avaldisi, mis tekivad indiviidmuutujatele korduvalt funktsionaalsümboleid rakendades. Termi täpne definitsioon on järgmine.

Definitsioon 2.10. Termiks signatuuris $\sigma = \langle \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ nimetatakse

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 42 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

- 1) iga indiviidmuutujat,
- 2) iga konstantsümbolit hulgast $\mathcal{K}$,
- 3) avaldist $f(t_1, \dots, t_n)$, kus f on n -kohaline funktsionaalsümbol hulgast $\mathcal{F}$ ja $t_1, \dots, t_n$ on termid signatuuris σ .

Asume defineerima valemi mõistet.

Definitsioon 2.11. Kui P on n -kohaline predikaatsümbol hulgast $\mathcal{P}$ ja $t_1, \dots, t_n$ on termid signatuuris σ , siis avaldist $P(t_1, \dots, t_n)$ nimetatakse **atomaarseks valemiks** signatuuris σ .

Valem moodustatakse atomaarsetest valemitest loogiliste tehete ja kvantorite abil. Järgnevalt esitatakse valemi induktiivne definitsioon. Samaaegselt defineeritakse ka vaba muutuja ja seotud muutuja mõiste.

Definitsioon 2.12. 1. Iga atomaarne valem signatuuris σ on valem selles signatuuris. Kõik atomaarses valemis esinevad muutujad on vabad.

2. Kui $\mathcal{A}$ on valem signatuuris σ , siis ka $\neg\mathcal{A}$ on valem signatuuris σ . Valemite $\mathcal{A}$ ja $\neg\mathcal{A}$ on ühed ja samad vabad ja seotud muutujad.

3. Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on valemid signatuuris σ ning ükski muutuja pole ühes neist vaba ja teises seotud, siis $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ ja $(\mathcal{A} \sim \mathcal{B})$ on valemid signatuuris σ . Nende valemite vabadeks muutujateks on kõik valemite $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ vabad muutujad ning nende valemite seotud muutujateks on kõik valemite $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ seotud muutujad.

4. Kui $\mathcal{A}$ on valem signatuuris σ ja muutuja x on vaba valemis $\mathcal{A}$, siis $\forall x\mathcal{A}$ ja $\exists x\mathcal{A}$ on valemid signatuuris σ . Valemite $\forall x\mathcal{A}$ ja $\exists x\mathcal{A}$ vabadeks muutujateks on valemi $\mathcal{A}$ muutujast x erinevad vabad muutujad, seotud muutujateks aga valemi $\mathcal{A}$ seotud muutujad ja muutuja x . Valemit $\mathcal{A}$ valemite $\forall x\mathcal{A}$ ja $\exists x\mathcal{A}$ nimetatakse **kvantori mõjupiirkonnaks**.

Valemit nimetatakse **kinniseks**, kui ta ei sisalda vabu muutujaid. Märgime, et ükski indiviidmuutuja valemis pole samaaegselt vaba ja seotud muutuja. Valemeid hakkame tähistama sümboolitega $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \dots$. Need sümboolid ei kuulu vaadeldava esimest järku keele sümboolite hulka, vaid neid kasutatakse esimest järku keele kirjeldamiseks. Kui $x_1, \dots, x_n$ on kõik valemis $\mathcal{A}$ esinevad vabad tundmatud,

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 43 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

nummerdatuna mingis järjekorras, siis seda tähistatakse ka kujul $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$.

Näide 2.13. Olgu A kahekohaline predikaat hulgast $\mathcal{P}$. Vaatleme kolme valemit

$$A(x, y), \quad \forall y A(x, y), \quad \exists y \forall x A(x, y).$$

Esimene valem on atomaarne valem. Indiviidmuutujad x ja y on selles vabad muutujad. Teises valemis x on vaba muutuja ning y on seotud muutuja, kvantori mõjupiirkonnaks on aga $A(x, y)$. Kolmandas valemis vabad muutujad puuduvad ja see valem on kinnine valem.

Näide 2.14. Olgu A kahekohaline predikaat vaadeldavas signatuuris. Vaatleme kahte avaldist

$$\forall x \exists y A(x, z) \wedge A(x, y), \quad \forall x (A(x, z) \wedge \exists x A(x, y)).$$

Kumbki nendest avaldistest pole valem. Esimene avaldis pole valem vähemalt kahel põhjusel: sulgude puudumise tõttu konjunktsioonis ning kvantori $\exists$ all oleva muutuja y puudumise tõttu atomaarses valemis $A(x, z)$. Teine avaldis pole valem aga seepärast, et muutuja x on konjunktsiooni esimeses liikmes vabaks muutujaks, teises liikmes aga seotud muutujaks. Küll aga on valemid järgmised avaldised

$$\forall x \exists y (A(x, z) \wedge A(x, y)), \quad \forall x_1 (A(x_1, z) \wedge \exists x A(x, y)).$$

Ka esimest järku keelte valemities jäetakse kokkuleppeliselt sulge ära. Säilitagem sulgude ärajätmiseks lausearvutuses tehtud kokkulepped. Lisaks lepime kokku, et kvantorid on prioriteedide järjekorras samaväärsed eitusega.

2.4. Signatuuri interpretatsioonid

Käesolevas peatükis mõistetakse matemaatilise struktuuri all hulka M , millel vaadeldakse funktsioone ja predikaate. Tavaliselt valitakse esimest järku keele signatuur vastavalt uuritavale matemaatilisele struktuurile. Saadud keele valemite hulgast leitakse vaadeldaval struktuuril tõesed valemid, mis moodustavadki selle struktuuri teooria.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 44 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Võib toimida ka vastupidi, st valitakse mingi esimest järku keel ja selles mingi valemite hulk Γ ning leitakse matemaatilised struktuurid, milles on tõesed kõik hulka Γ kuuluvad valemid. Nii näiteks saadakse algebrast tuntud rühmateooria (vt käesoleva alajaotuse lõppu).

Et esimest järku keele valemitele anda matemaatiline sisu, tuleb selle valemis esinevatele sümbolitele anda tõlgendus mingil matemaatilisel struktuuril. On selge, et tõlgendus tuleb anda vaid signatuuri kuuluvatele sümbolitele, indiviidmuutujaid tõlgendatakse automaatselt kui vaadeldava matemaatilise struktuuri M muutuvaid elemente. Seetõttu räägitakse vaadeldava signatuuri σ interpretatsioonist.

Definitsioon 2.15. Olgu $\sigma = \langle \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$ mingi signatuur. Signatuuri σ **interpretatsiooniks** nimetatakse paari $\langle M, I \rangle$, kus M on matemaatiline struktuur ja I on nn interpreteeriv kujutus, mis seab

- 1) igale konstantsümbolile $c \in \mathcal{K}$ vastavusse elemendi $\bar{c} \in M$,
- 2) igale n -kohalisele funktsionaalsümbolile $f \in \mathcal{F}$ vastavusse hulgal M määratud n -kohalise funktsiooni $\bar{f} : M^n \longrightarrow M$,
- 3) igale n -kohalisele predikaatsümbolile $P \in \mathcal{P}$ vastavusse hulgal M määratud n -kohalise predikaadi $\bar{P} : M^n \longrightarrow \{0, 1\}$.

Hulka M nimetatakse interpretatsiooni $\langle M, I \rangle$ **kandjaks**. Tavaliselt samastatakse sümbolid c , f ja P neile antud interpretatsioonis vastavate sümbolitega $\bar{c}$, $\bar{f}$ ja $\bar{P}$. Järgnevalt eeldatakse, et võrduspredikaadile on vastavusse pandud võrduspredikaat. Iga interpretatsiooni korral eeldatakse, et indiviidmuutujad muutuvad üle interpretatsiooni kandja M . Kinnisele valemile vastab interpretatsioonis lause (väide) struktuuri M kohta ning see lause võib olla kas tõene või väär. Vabade muutujatega valemile vastab interpretatsioonis predikaat indiviidide hulgal M , mis on muutujate ühtede väärtustuste korral hulgal M tõene, teiste väärtustuste korral aga väär.

Näide 2.16. Sisaldagu vaadeldava esimest järku keele signatuur σ kahekohalist predikaatsümbolit A , ühekohalist predikaatsümbolit B ja kahekohalist funktsionaalsümbolit f . Moodustame järgmised valemid signatuuris σ :

$$\mathcal{A} = (A(f(x, y), x) \wedge B(y)) = \mathcal{A}(x, y),$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 45 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\mathcal{B} = \exists y \mathcal{A} = \exists y (A(f(x, y), x) \wedge B(y)) = \mathcal{B}(x),$$

$$\mathcal{C} = \forall x \mathcal{B} = \forall x \exists y (A(f(x, y), x) \wedge B(y)).$$

Valemis $\mathcal{A}$ on vabadeks muutujateks x ja y , valemis $\mathcal{B}$ on vabaks muutujaks x ning valem $\mathcal{C}$ on kinnine valem. Valime hulgaks M , millel interpreteerime neid valemeid, kõigi naturaalarvude hulga $\mathbb{N}$. Tõlgendame funktsionaalsümbolit f liitmisenä, predikaatsümbolit A seosena $\geq$ ning predikaatsümbolit B omadusena olla suurem või võrdne kui 100. Siis valemid $\mathcal{A}(x, y)$, $\mathcal{B}(x)$ ja $\mathcal{C}$ on tõlgendatavad järgmiste väidetena hulgal $\mathbb{N}$:

$$\mathcal{A}(x, y) = ((x + y \geq x) \wedge (y \geq 100)),$$

$$\mathcal{B}(x) = \exists y ((x + y \geq x) \wedge (y \geq 100)),$$

$$\mathcal{C} = \forall x \exists y ((x + y \geq x) \wedge (y \geq 100)).$$

Nagu näha, väide $\mathcal{A}(x, y)$ määrab kahekohalise predikaadi hulgal $\mathbb{N}$, väide $\mathcal{B}(x)$ ühekohalise predikaadi hulgal $\mathbb{N}$ ning väide $\mathcal{C}$ on lause hulga $\mathbb{N}$ kohta. Siin sümboleid x ja y tuleb tõlgendada hulga $\mathbb{N}$ elementidena. Predikaat $\mathcal{A}(x, y)$ on tõene hulgal $\mathbb{N}$ parajasti siis, kui $y \geq 100$. Predikaat $\mathcal{B}(x)$ on tõene iga naturaalarvu x korral ja lause $\mathcal{C}$ on tõene hulgal $\mathbb{N}$.

Olgu antud valem $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$ vabade muutujatega $x_1, \dots, x_n$. Defineerime järgnevalt valemi $\mathcal{A}$ tõeväärtuse $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n)$ antud interpretatsiooni korral vabade tundmatute väärtustusel hulga M elementidega $a_1, \dots, a_n$. Seda tehakse samm-sammult vastavalt valemi $\mathcal{A}$ induktiivsele moodustamisele:

1) $\mathcal{A}$ on atomaarne valem $P(x_1, \dots, x_n)$.

Valemi $\mathcal{A}$ tõeväärtuseks tema vabade tundmatute väärtustusel $a_1, \dots, a_n$ nimetatakse hulgal M määratud n -kohalise predikaadi $\bar{P}(x_1, \dots, x_n)$ tõeväärtust $\bar{P}(a_1, \dots, a_n)$:

$$\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) = \bar{P}(a_1, \dots, a_n).$$

2) $\mathcal{A} = \neg \mathcal{B}$, kus $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$.

Siis

$$\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) = 1 - \mathcal{B}(a_1, \dots, a_n).$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 46 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

3) $\mathcal{A} = (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$, $\mathcal{A} = (\mathcal{B} \vee \mathcal{C})$, $\mathcal{A} = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$ või $\mathcal{A} = (\mathcal{B} \sim \mathcal{C})$, kus $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathcal{C} = \mathcal{C}(x_1, \dots, x_n)$.

Nende valemite tõeväärtused vabade tundmatute väärtustel hulga M elementidega $a_1, \dots, a_n$ defineeritakse vastavalt võrdustega

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) &= \mathcal{B}(a_1, \dots, a_n) \wedge \mathcal{C}(a_1, \dots, a_n), \\ \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) &= \mathcal{B}(a_1, \dots, a_n) \vee \mathcal{C}(a_1, \dots, a_n), \\ \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) &= \mathcal{B}(a_1, \dots, a_n) \rightarrow \mathcal{C}(a_1, \dots, a_n), \\ \mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) &= \mathcal{B}(a_1, \dots, a_n) \sim \mathcal{C}(a_1, \dots, a_n)\end{aligned}$$

(siin tuleb sümboleid $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\sim$ mõista Boole'i funktsioonidena).

4) $\mathcal{A} = \forall x \mathcal{B}$, kus $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x, x_1, \dots, x_n)$.

Siis $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) = 1$ parajasti siis, kui $\mathcal{B}(a, a_1, \dots, a_n) = 1$ iga $a \in M$ korral.

5) $\mathcal{A} = \exists x \mathcal{B}$, kus $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x, x_1, \dots, x_n)$.

Siis $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$ ja $\mathcal{A}(a_1, \dots, a_n) = 1$ parajasti siis, kui leidub selline $a \in M$, et $\mathcal{B}(a, a_1, \dots, a_n) = 1$.

Näide 2.17. Sisaldagu vaadeldava esimest järku keele sümboolite hulk kahekohalist predikaati $P(x, y)$. Moodustame valemid

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, y, z) = (P(x, y) \rightarrow P(y, z)),$$

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}(x, y, z) = (P(x, y) \wedge P(y, z)).$$

Vaatleme kaheelemendilist hulka $M = \{a, b\}$ kahekohaliste predikaatidega $P_1(x, y)$ ja $P_2(x, y)$, mis on määratud tabeliga

x	y	$P_1(x, y)$	$P_2(x, y)$
a	a	1	1
a	b	0	1
b	a	0	0
b	b	1	0

Interpreteerides predikaatsümboolit P hulgal M predikaadina P_1 , saadakse

$$\mathcal{A}(a, a, a) = (P_1(a, a) \rightarrow P_1(a, a)) = (1 \rightarrow 1) = 1,$$

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 47 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$$\mathcal{A}(a, a, b) = (P_1(a, a) \rightarrow P_1(a, b)) = (1 \rightarrow 0) = 0,$$

$$\mathcal{A}(a, b, b) = (P_1(a, b) \rightarrow P_1(b, b)) = (0 \rightarrow 0) = 1,$$

$$\forall y \mathcal{A} = \forall y \mathcal{A}(x, z) = \forall y (P(x, y) \rightarrow P(y, z)),$$

$$\forall y \mathcal{A}(a, b) = \forall y (P_1(a, y) \rightarrow P_1(y, b)) = 0.$$

Interpreteerides predikaatsümbolit P hulgal M predikaadina P_2 , saadakse

$$\mathcal{A}(a, a, a) = (P_2(a, a) \rightarrow P_2(a, a)) = (1 \rightarrow 1) = 1,$$

$$\mathcal{A}(a, a, b) = (P_2(a, a) \rightarrow P_2(a, b)) = (1 \rightarrow 1) = 1,$$

$$\mathcal{A}(a, b, b) = (P_2(a, b) \rightarrow P_2(b, b)) = (1 \rightarrow 0) = 0,$$

$$\forall y \mathcal{A}(a, b) = \forall y (P_2(a, y) \rightarrow P_2(y, b)) = 0.$$

Toome näite matemaatilisest analüüsist, kus vaadeldava probleemi kirjeldamiseks sümbolite abil valitakse sobivalt esimest järku keel.

Näide 2.18. Olgu $f(x)$ lõigul $[a; b]$ määratud funktsioon väärtustega kõigi reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$. Funktsiooni $f(x)$ nimetatakse **pidevaks** punktis $x_0 \in]a; b[$, kui

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Viimane piirväärtus eksisteerib aga parajasti siis, kui vastavalt igale positiivsele arvule ϵ saab leida sellise positiivse arvu δ , et iga $x \in]a; b[$ korral võrratusest $|x - x_0| < \delta$ järgeldub võrratus $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$. Püüame leida valemi $\mathcal{A}$ sobivas signatuuris σ nii, et valem $\mathcal{A}$ on reaalarvude hulgal interpreteerides tõene parajasti siis, kui funktsioon $f(x)$ on pidev punktis x_0 . Pannes ülalöeldud pidevuse definitsiooni sümbolite abil kirja, saame avaldise

$$\begin{aligned} \forall \epsilon (\epsilon > 0 \rightarrow \exists \delta (\delta > 0 \wedge \forall x (a < x \wedge x < b \wedge |x - x_0| < \delta \rightarrow \\ \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon))), \end{aligned} \quad (2.3)$$

mis on otsitava valemi interpretatsiooniks reaalarvude hulgal $\mathbb{R}$. Seega valemi $\mathcal{A}$ saamiseks vajatakse signatuuri

$$\sigma = \{0, c, d, e; F, G; <, >\},$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 48 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

kus $0, c, d, e$ on konstantsümbolid, F on ühekohaline funktsionaalsümbol, G on kahekohaline funktsionaalsümbol ja $>$ ning $<$ on kahekohalised predikaatsümbolid. Siis valemiks $\mathcal{A}$ sobib valem

$$\mathcal{A} = \forall \epsilon (\epsilon > 0 \rightarrow \forall \delta (\delta > 0 \wedge \forall x (d < x \wedge x < e \wedge G(x, c) < \delta \rightarrow \\ \rightarrow G(F(x), F(c)) < \epsilon)))$$

(siin ϵ, δ, x on indiidmuutujad). Et saada valemi $\mathcal{A}$ interpretatsiooniks avaldis (2.3), tuleb signatuuri σ interpreteerida järgmiselt: 0 tõlgendada reaalarvuna 0 , konstantsümboleid c, d, e tõlgendada vastavalt arvudena x_0, a, b , funktsionaalsümbolit F tõlgendada funktsioonina f , funktsionaalsümbolit G tõlgendada kujul $G(x, y) = |x - y|$ ja predikaatsümboleid $<$ ja $>$ tõlgendada kui sama tähistega seoseid reaalarvude hulgal.

Märkus Sageli pannaksegi avaldised kirja mitte predikaatarvutuse valemi kujul, vaid selle valemi interpretatsiooni kujul.

Käesoleva alajaotuse alguses mainisime, et tavaliselt valitakse esimest järku keel vastavalt uuritavale matemaatilisele struktuurile ja selle struktuuri teooria arendamine seisneb selliste valemite leidmises, mis on tõesed vaadeldaval struktuuril. Vastupidine lähenemisviis seisneb selles, et valitakse esimest järku keel ja selle keele mingi valemite hulk Γ ning püütakse uurida matemaatilisi struktuure, millel hulka Γ kuuluvaid valemeid interpreteerides, need valemid on tõesed.

Näide 2.19. Vaatleme signatuuri $\sigma = \langle \mathcal{K}, \mathcal{F}, \mathcal{P} \rangle$, kus

$$\mathcal{K} = \{e\}, \quad \mathcal{F} = \{\circ\}, \quad \mathcal{P} = \{=\}$$

ja $\circ$ on binaarne tehe (kahekohaline funktsioon). Moodustame valemid $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ signatuuris σ :

$$\mathcal{A} = \forall x \forall y \forall z (x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z),$$

$$\mathcal{B} = \forall x ((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x)),$$

$$\mathcal{C} = \forall x \exists y ((x \circ y = e) \wedge (y \circ x = e)).$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 49 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Valemid $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ on kinnised valemid. Iga matemaatilist struktuuri M , mis on vaadeldava signatuuri interpretatsiooniks ja milles on tõesed valemid $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$, nimetatakse **rühmaks**. Seega rühm M on hulk tehtega $\circ$, mis rahuldab järgmist kolme omadust: 1) tehe $\circ$ on assotsiatiivne (st valem $\mathcal{A}$ on tõene), 2) tehte $\circ$ suhtes leidub ühik e (st valem $\mathcal{B}$ on tõene), 3) igal elemendil $x \in M$ leidub tehte $\circ$ suhtes pöördelement y (st valem $\mathcal{C}$ on tõene).

2.5. Predikaatarvutuse põhiseadused

Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ valemid, mis sisaldavad ühtesid ja samu vabu indiviidmuutujaid $x_1, \dots, x_n$:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n), \quad \mathcal{B} = \mathcal{B}(x_1, \dots, x_n).$$

Valemeid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ nimetatakse **samaväärseteks antud interpretatsioonis**, kui nende valemite tõeväärtused langevad kokku vabade indiviidmuutujate iga väärtustuse $a_1, \dots, a_n$ korral (selles interpretatsioonis). Valemeid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ nimetatakse **samaväärseteks**, kui nad on samaväärsed igas interpretatsioonis. Järgnevalt esitatakse põhilised predikaatarvutuse samaväärsused. Valemite $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ samaväärsust tähistatakse $\mathcal{A} \equiv \mathcal{B}$.

Kõigepealt mainime, et ilmselt kehtib

Teoreem 2.20. *Kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on loogiliselt samaväärsed lausearvutuse valemid ning valemid $\mathcal{A}^*$ ja $\mathcal{B}^*$ on saadud nendest valemitest lausemuutujate asendamisel mingite predikaatarvutuse valemitega, siis $\mathcal{A}^* \equiv \mathcal{B}^*$*

Näide 2.21. Vaatleme valemid $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ näites 2.19 antud signatuuris:

$$\mathcal{C} = \forall x((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x)),$$

$$\mathcal{D} = \forall z \exists y((z \circ y = e) \wedge (y \circ z = e)).$$

Asendame need valemid lausemuutujate X ja Y asemele loogiliselt samaväärsetes lausearvutuse valemites $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X, Y) = (X \rightarrow Y)$ ja $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X, Y) = (\neg X \vee Y)$. Saame valemid

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) = (\forall x((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x)) \rightarrow$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 50 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{aligned} &\rightarrow \forall z \exists y ((z \circ y = e) \wedge (y \circ z = e)), \\ \mathcal{B}^* = \mathcal{B}(\mathcal{C}, \mathcal{D}) &= (\neg \forall x ((x \circ e = x) \wedge (e \circ x = x)) \vee \\ &\vee \forall z \exists y ((z \circ y = e) \wedge (y \circ z = e))). \end{aligned}$$

Teoreemi 2.20 kohaselt on valemid $\mathcal{A}^*$ ja $\mathcal{B}^*$ samaväärsed.

Loetleme ja tõestame järgnevalt predikaatarvutuse põhilised samaväärsused, mida nende olulisuse tõttu võib nimetada ka *predikaatarvutuse põhiseadusteks*.

Teoreem 2.22.

$$\begin{aligned} \neg \forall x \mathcal{A}(x) &\equiv \exists x \neg \mathcal{A}(x) \\ \neg \exists x \mathcal{A}(x) &\equiv \forall x \neg \mathcal{A}(x) \end{aligned}$$

Tõestus. Tõestame kõigepealt esimese samaväärsuse. Sisaldagu valem $\mathcal{A}$ veel vabu muutujaid $x_1, \dots, x_n$, st $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x, x_1, \dots, x_n)$. Olgu $< M, I >$ mis tahes interpretatsioon. Valime $a_1, \dots, a_n \in M$. On kaks võimalust:

- 1) $\mathcal{A}(a, a_1, \dots, a_n) = 1$ iga $a \in M$ korral,
- 2) $\mathcal{A}(a_0, a_1, \dots, a_n) = 0$ mingi $a_0 \in M$ korral.

Esimesel juhul $\neg \mathcal{A}(a, a_1, \dots, a_n) = 0$ iga $a \in M$ korral, st

$$\exists x \neg \mathcal{A}(x, a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Teiselt poolt esimesel juhul $\forall x \mathcal{A}(x, a_1, \dots, a_n) = 1$ ja

$$\neg \forall x \mathcal{A}(x, a_1, \dots, a_n) = 0.$$

Seega juhul 1) valemite $\neg \forall x \mathcal{A}(x)$ ja $\exists x \neg \mathcal{A}(x)$ tõeväärtused langevad kokku. Vaatleme nüüd juhtu 2). Siis

$$\forall x \mathcal{A}(x, a_1, \dots, a_n) = 0, \quad \neg \forall x \mathcal{A}(x, a_1, \dots, a_n) = 1,$$

$$\neg \mathcal{A}(a_0, a_1, \dots, a_n) = 1, \quad \exists x \neg \mathcal{A}(x, a_1, \dots, a_n) = 1.$$

Seega ka juhul 2) valemite $\neg \forall x \mathcal{A}(x)$ ja $\exists x \neg \mathcal{A}(x)$ tõeväärtused langevad kokku. Seega valemid $\neg \forall x \mathcal{A}(x)$ ja $\exists x \neg \mathcal{A}(x)$ on samaväärsed.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 51 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Teise samaväärsuse põhjendamiseks kasutame esimest samaväärsust valemi $\neg\mathcal{A}(x)$ jaoks:

$$\neg(\forall x)\neg\mathcal{A}(x) \equiv \exists x\neg\neg\mathcal{A}(x) \equiv \exists x\mathcal{A}(x),$$

$$\forall x\neg\mathcal{A}(x) \equiv \neg\neg\forall x\neg\mathcal{A}(x) \equiv \neg\exists x\neg\neg\mathcal{A}(x) \equiv \neg\exists x\mathcal{A}(x).$$

□

Teoreem 2.23.

$$\forall x(\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)) \equiv \forall x\mathcal{A}(x) \wedge \forall x\mathcal{B}(x)$$

$$\exists x(\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) \equiv \exists x\mathcal{A}(x) \vee \exists x\mathcal{B}(x)$$

Tõestus. Valime mis tahes interpretatsiooni $\langle M, I \rangle$ ja antud valemite muutujast x erinevate vabade muutujate mis tahes väärtustuse. Siis

$$\forall x(\mathcal{A}(x) \wedge \mathcal{B}(x)) = 1 \iff \mathcal{A}(a) \wedge \mathcal{B}(a) = 1 \text{ iga } a \in M \text{ korral} \iff$$

$$\iff \mathcal{A}(a) = 1 \text{ ja } \mathcal{B}(a) = 1 \text{ iga } a \in M \text{ korral} \iff$$

$$\iff \forall x\mathcal{A}(x) = 1 \text{ ja } \forall x\mathcal{B}(x) = 1 \iff \forall x\mathcal{A}(x) \wedge \forall x\mathcal{B}(x) = 1.$$

Seega esimene samasus kehtib. Teine samasus saadakse juba tõestatud samasuste abil:

$$\begin{aligned} \exists x(\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)) &\equiv \exists x(\neg\neg\mathcal{A}(x) \vee \neg\neg\mathcal{B}(x)) \equiv \\ &\equiv \exists x(\neg(\neg\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{B}(x))) \equiv \neg\forall x(\neg\mathcal{A}(x) \wedge \neg\mathcal{B}(x)) \equiv \\ &\equiv \neg(\forall x(\neg\mathcal{A}(x)) \wedge \forall x(\neg\mathcal{B}(x))) \equiv \neg(\forall x(\neg\mathcal{A}(x))) \vee \neg(\forall x(\neg\mathcal{B}(x))) \equiv \\ &\equiv \exists x(\neg\neg\mathcal{A}(x)) \vee \exists x(\neg\neg\mathcal{B}(x)) \equiv \exists x\mathcal{A}(x) \vee \exists x\mathcal{B}(x). \end{aligned}$$

□

Teoreem 2.24. Kui valem $\mathcal{A}$ ei sisalda muutujat x , siis

$$\forall x(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}(x)) \equiv \mathcal{A} \wedge \forall x\mathcal{B}(x)$$

$$\forall x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \equiv \mathcal{A} \vee \forall x\mathcal{B}(x)$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 52 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\forall x(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(x)) \equiv \mathcal{A} \rightarrow \forall x\mathcal{B}(x)$$

$$\exists x(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}(x)) \equiv \mathcal{A} \wedge \exists x\mathcal{B}(x)$$

$$\exists x(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \equiv \mathcal{A} \vee \exists x\mathcal{B}(x)$$

$$\exists x(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(x)) \equiv \mathcal{A} \rightarrow \exists x\mathcal{B}(x)$$

Tõestus. Tõestame antud kuuest samasusest ainult kolmanda. Seejuures eeldame, et kaks esimest on neist juba tõestatud. Kolmanda samasuse põhjendus:

$$\begin{aligned} \forall x(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(x)) &\equiv \forall x(\neg\mathcal{A} \vee \mathcal{B}(x)) \equiv \\ &\equiv \neg\mathcal{A} \vee (\forall x\mathcal{B}(x)) \equiv \mathcal{A} \rightarrow \forall x\mathcal{B}(x). \end{aligned}$$

□

Teoreem 2.25.

$$\forall x(\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}) \equiv \exists x\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}$$

$$\exists x(\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}) \equiv \forall x\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}$$

Tõestus. Kasutame eelnevalt saadud samaväärsusi:

$$\begin{aligned} \forall x(\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}) &\equiv \forall x(\neg\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}) \equiv \\ &\equiv \forall x(\mathcal{B} \vee \neg\mathcal{A}(x)) \equiv \mathcal{B} \vee \forall x(\neg\mathcal{A}(x)) \equiv \\ &\equiv \mathcal{B} \vee \neg(\exists x\mathcal{A}(x)) \equiv \neg(\exists x\mathcal{A}(x)) \vee \mathcal{B} \equiv \\ &\equiv \exists x\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}. \end{aligned}$$

Teine samaväärsus tõestatakse analoogiliselt.

□

Teoreem 2.26. Kui valem $\mathcal{A}(x)$ ei sisalda muutujat y , siis

$$\forall x\mathcal{A}(x) \equiv \forall y\mathcal{A}(y)$$

$$\exists x\mathcal{A}(x) \equiv \exists y\mathcal{A}(y)$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 53 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Teoreem 2.27.

$$\forall x \forall y \mathcal{A}(x, y) \equiv \forall y \forall x \mathcal{A}(x, y)$$

$$\exists x \exists y \mathcal{A}(x, y) \equiv \exists y \exists x \mathcal{A}(x, y)$$

Teoreemide 2.26 ja 2.27 põhjendused jätame lugejale.

Teoreem 2.28. Iga esimest järku keele valemi $\mathcal{B}$ jaoks leidub temaga loogiliselt samaväärne nn **prefikskujul** valem

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \dots Q_n x_n \mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kus $Q_1, \dots, Q_n$ on kvantorid ja $\mathcal{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ on kvantoriteta valem.

Teoreemi 2.28 me ei tõesta, kuid mainime, et valemi $\mathcal{B}$ jaoks temaga loogiliselt samaväärse prefikskujul valemi leidmine toimub ülalootletud loogiliste samaväärsuste abil. Illustreerime valemi prefikskujule viimist näitega.

Näide 2.29. Viime valemi

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y)$$

prefikskujule:

$$\begin{aligned} & \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y) \equiv \\ & \equiv \exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall u \exists v R(u, v) \equiv \\ & \equiv \forall x (\forall y P(x, y) \rightarrow \forall u \exists v R(u, v)) \equiv \\ & \equiv \forall x \exists y (P(x, y) \rightarrow \forall u \exists v R(u, v)) \equiv \\ & \equiv \forall x \exists y \forall u \exists v (P(x, y) \rightarrow R(u, v)) \equiv \\ & \equiv \forall x \exists y \forall u \exists v (\neg P(x, y) \vee R(u, v)). \end{aligned}$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 54 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

2.6. Ülesandeid

2.1 Sisaldagu vaadeldav signatuur σ kahte kolmekohalist predikaatsümbolit S ja P . Interpreteerime neid sümboleid naturaalarvude hulgal $\mathbb{N}$ järgmiselt:

$$S(x, y, z) : x + y = z,$$

$$P(x, y, z) : x \cdot y = z.$$

Siis:

1) Koostada valem ühe vaba indiviidmuutujaga x , mis toodud interpretatsioonis oleks tõene parajasti siis, kui: a) $x = 0$, b) $x = 1$, c) $x = 2$, d) x on paarisarv, e) x on paaritu arv, f) x on algarv.

2) Koostada valem kahe vaba indiviidmuutujaga x ja y , mis toodud interpretatsioonis oleks tõene parajasti siis, kui: a) $x = y$, b) $x \leq y$, c) x on väiksem kui y , d) y jagub arvuga x .

3) Koostada valem kolme vaba indiviidmuutujaga x , y ja z , mis toodud interpretatsioonis oleks tõene parajasti siis, kui: a) z on arvude x ja y vähim ühiskordne, b) z on arvude x ja y suurim ühistegur.

2.2 Sisaldagu vaadeldav signatuur kolme ühekohalist predikaatsümbolit P , S ja T ning ühte kahekohalist predikaatsümbolit A . Tähistagu M kolmemõõtmelise eukleidilise ruumi kõigi punktide, sirgete ja tasandite hulka. Interpreteerime sümboleid P , S , T ja A hulgal M järgmiselt:

$$P(x) : x \text{ on punkt,}$$

$$S(x) : x \text{ on sirge,}$$

$$T(x) : x \text{ on tasand,}$$

$$A(x, y) : x \text{ asub objektil } y.$$

Koostada valem, mis kirjeldatud interpretatsioonis väljandab asjaolu:

1) läbi iga kahe punkti võib panna sirge; kui need punktid on erinevad, siis see sirge on üheselt määratud;

2) läbi kolme punkti, mis ei asu ühel sirgel, võib panna parajasti ühe tasandi;

3) paralleelsete sirgete definitsioon;

4) paralleelsete tasandite definitsioon.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 55 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Ülesannetes 2.3-2.7 konstrueerida interpretatsioon, mis näitab, et antud valemid $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ pole loogiliselt samaväärsed.

$$2.3 \quad \mathcal{C} = \forall x \mathcal{A}(x) \vee \forall x \mathcal{B}(x), \quad \mathcal{D} = \forall x (\mathcal{A}(x) \vee \mathcal{B}(x)).$$

$$2.4 \quad \mathcal{C} = \forall x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}), \quad \mathcal{D} = \forall x \mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}.$$

$$2.5 \quad \mathcal{C} = \exists x (\mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}), \quad \mathcal{D} = \exists x \mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{B}.$$

$$2.6 \quad \mathcal{C} = \forall x (\mathcal{A} \sim \mathcal{B}(x)), \quad \mathcal{D} = (\mathcal{A} \sim \forall x \mathcal{B}(x)).$$

$$2.7 \quad \mathcal{C} = \exists x (\mathcal{A} \sim \mathcal{B}(x)), \quad \mathcal{D} = (\mathcal{A} \sim \exists x \mathcal{B}(x)).$$

Ülesannetes 2.8-2.11 otsustada, kas antud valem on samaselt tõene.

$$2.8 \quad (\exists x P(x) \longrightarrow \forall y P(y)).$$

$$2.9 \quad \neg(\exists x P(x) \longrightarrow \forall y P(y)).$$

$$2.10 \quad (\exists x \forall y Q(x, y) \longrightarrow \forall v \exists u Q(u, v)).$$

$$2.11 \quad (\forall x \exists y Q(x, y) \longrightarrow \exists v \forall u Q(u, v)).$$

2.12 Viia prefikskujule valem

$$\forall x \exists y (A(x) \rightarrow B(y, z)) \rightarrow \exists u \forall v (B(u, v) \wedge A(w)),$$

kus A on ühekohaline ja B on kahekohaline predikaatsümbol vaadeldavas keeles.

2.13 Viia prefikskujule valem

$$\forall x P(x) \rightarrow \forall y (\forall z Q(y, v, z) \rightarrow \forall u P(u)),$$

kus P on ühekohaline ja Q on kolmekohaline predikaatsümbol vaadeldavas keeles.

Ülesannetes 2.14–2.18 viia antud valem prefikskujule (eeldatakse, et valemid $\mathcal{A}(x, y)$ ja $\mathcal{B}(x, y)$ ei sisalda kvantoreid).

$$2.14 \quad \forall x P(x) \rightarrow \forall x \exists y R(x, y).$$

$$2.15 \quad \neg \exists x \forall y \exists z \forall u \mathcal{A}.$$

$$2.16 \quad \exists x \forall y \mathcal{A}(x, y) \wedge \exists x \forall y \mathcal{B}(x, y).$$

$$2.17 \quad \exists x \forall y \mathcal{A}(x, y) \vee \exists x \forall y \mathcal{B}(x, y).$$

$$2.18 \quad \exists x \forall y \mathcal{A}(x, y) \rightarrow \exists x \forall y \mathcal{B}(x, y).$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 56 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

3. FORMAALSED AKSIOMAATILISED TEOORIAD

3.1. Sissejuhatus

Mitmed matemaatilised distsipliinid esitatakse aksiomaatiliselt. Aksiomaatilise käsitluse korral loetakse teatud hulk väiteid tõesteks ilma põhjendusteta. Neid väiteid nimetatakse **aksioomideks**. Aksioomideks valitakse väited, mis on ilmsed, st millede õigsuses keegi ei kahtle. Ülejäänud teooria väited tõestatakse aksioomidest lähtudes loogiliste arutluste teel. Aksiomaatiliselt esitatud loodusteadustes (näiteks kvantmehaanika, elektrodünaamika) on aksioomideks valitud väited, mis on vaatluste ja eksperimentidega kinnitust leidnud. Seetõttu on siin aksioomide tõesus ka suhtelise iseloomuga.

Ajalooliselt esimeseks aksiomaatiliseks teooriaks oli Eukleidese poolt loodud geomeetria aksiomaatiline käsitlus. Tavaliselt eelneb teooria aksiomaatilisele esitusele selle teooria mitteaksiomaatiline areng. Teooria arengu teatud etapil "sõelutakse" sealt välja põhitõed (aksioomid), milledest loogiliste arutlustega tuletatakse uusi keerulisema struktuuriga väiteid. Kaasaegse matemaatika aksiomaatilised teooriad fikseerivad ise aksioomid ja määravad sellega nii uurimisobjekti kui ka teooria: teooriaks on teoreemid (väited), mis tuletatakse aksioomidest loogiliste arutlustega. Selliste teooriate näideteks on vektorruumide teooria, rühmateooria jne..

Loogika seisukohalt pakub huvi põhiliselt teoreemide tõestusvõtted. Võiks arvata, et õige loogiline mõtlemine on kõigil "normaalsel" inimestel ühesugune. Aga matemaatika ajalugu on näidanud, et mitmed kuulsad matemaatikud pole leidnud üksmeelt mõne konkreetse teoreemi tõestusvõtete üle. Tõestusvõtted, mis on vastuvõetavad olnud ühtedele matemaatikutele, pole seda olnud teistele matemaatikutele. Näiteks Carl Weierstrass (1815-1897), keda tuntakse matemaatikute hulgas "ranguse isana", polnud rahul paljude tema eelkäijate poolt antud teoreemide tõestustega ning esitas matemaatilisest analüüsist tuntud teoreemidele uued tõestused. Teiseks tuntud näiteks on nn **valiku aksiom**⁸, mida sageli kasutatakse olemasoluteoreemide

⁸Valiku aksiom väidab, et alati leidub funktsioon (kujutus), mis mittetüh-

[Autori koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀](#)[▶](#)[◀](#)[▶](#)

Lk 57 / 247

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

tõestustes, kuid mida paljud matemaatikud ei tunnista. Seetõttu on matemaatilises loogikas lisaks aksioomidele vaatluse alla võetud ka tõestusvõtted. Selleks näidatakse ära ka **tuletusreeglid**, millede abil aksioomidest tuletatakse uusi väiteid. Nii ongi tekkinud **formaalse aksiomaatilise teooria** mõiste, mida vaatleme järgmises alajaotuses.

3.2. Formaalne aksiomaatiline teooria

Asume kirjeldama formaalse aksiomaatilise teooria $\mathcal{T}$ üldpõhimõtteid. Järgmises alajaotuses esitatakse lausearvutus aksiomaatilise teooriana.

Formaalse aksiomaatilise teooria (edaspidi lühidalt: teooria) konstrueerimiseks peab olema antud sümbolite hulk $\mathcal{S}$, mida vajatakse teooria esitamiseks vajalike avaldiste moodustamiseks. Sümbolite hulka $\mathcal{S}$ nimetatakse **tähestikuks**. Eeldatakse, et hulk $\mathcal{S}$ on loenduv⁹. Sümbolite hulga $\mathcal{S}$ elementide lõplikku jada nimetatakse **sõnaks** tähestikus $\mathcal{S}$.

Näide 3.1. Kui tähestikuks on $\mathcal{S} = \{A, B, C, =, -, :, 1, 2, 3\}$, siis sõnadeks selles tähestikus on näiteks avaldised

$$BA - C : AA1$$

$$2A - 3C = B$$

$$-BB : 3A = C$$

Kõigi sõnade hulgast eraldatakse kindlate reeglite alusel välja osa sõnu, mida nimetatakse selle teooria $\mathcal{T}$ **valemiteks**. Tavaliselt antakse efektiivsed reeglid, mille abil saab otsustada, kas antud sõna tähestikus $\mathcal{S}$ on valem või mitte.

ja hulga igale mittetühjale alamhulgale paneb vastavusse mingi elemendi sellest alamhulgast. Valiku aksioomis kahtlejad väidavad, et pole ära näidatud algoritmi, mille abil mainitud vastavusse pandud alamhulga elementi leida.

⁹Hulka nimetatakse **loenduvaks**, kui leidub üksühene vastavus selle hulga ja kõigi naturaalarvude hulga elementide vahel.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 58 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 3.2. Lausearvutuse aksiomaatilise esituse korral moodustavad tähestiku $\mathcal{S}$ lausemuutujad, loogiliste tehete sümbolid ja sulud. Valemiteks on aga parajasti lausearvutuse valemid (vt esimeses paragrahvis esitatud lausearvutuse valemi formaalset definitsiooni).

Teooria $\mathcal{T}$ kõigi valemite hulgast eraldatakse välja teatud hulk valemeid, mida nimetatakse **aksioomideks**. Aksioomid on valemid, mida loetakse teoorias $\mathcal{T}$ *á priori* tõesteks (nad ei vaja tõestamist). Tavaliselt nõutakse, et leidub efektiivne algoritm, mille abil saab otsustada, kas antud valem on aksioom või mitte.

Aksioomidest tuletatakse **tuletusreeglite** abil uusi valemeid, mida nimetatakse **tuletatavateks valemiteks**. Tuletusreegleid peab olema lõplik arv. Iga tuletusreegel on kujuga

$$\frac{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n}{\mathcal{B}}$$

ja sellega loetakse valem $\mathcal{B}$ valemite $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ **vahetuks järelduseks** (ehk valem $\mathcal{B}$ järeldub vahetult valemitest $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$). Kõik tuletatavad valemid saadakse järk-järgult: 1) iga aksioom on tuletatav valem, 2) tuletatavate valemite vahetute järeldustena saadud valemid on tuletatavad valemid. Anname tuletatava valemi täpse definitsiooni.

Definitsioon 3.3. Tuletuseks ehk formaalseks tõestuseks teoorias $\mathcal{T}$ nimetatakse lõplikku valemite jada $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, kus iga valem $\mathcal{A}_i$ ($1 \leq i \leq n$) on kas aksioom või eelnevate valemite $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{i-1}$ seas esinevate valemite vahetu järeldus.

Definitsioon 3.4. Valemit $\mathcal{A}$ nimetatakse **tuletatavaks** teoorias $\mathcal{T}$, kui leidub tuletus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, kus viimaseks valemiks $\mathcal{A}_n$ on valem $\mathcal{A}$. Teoorias $\mathcal{T}$ tuletatavaid valemeid nimetatakse ka selle teooria **teoreemideks**.

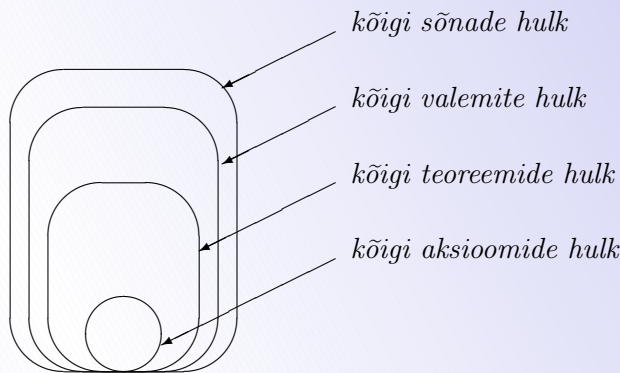
Iga teooria $\mathcal{T}$ korral on eesmärgiks leida selle teooria teoreemid ehk tuletatavad valemid. Tuletatavad valemid on valemid, mis on tõesed vaadeldavas teoorias.

Joonisel 3.1 on kujutatud Venni diagrammidena sõnade hulk tähestikus $\mathcal{S}$ ja sõnade hulga ülalkirjeldatud alamhulgad.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 59 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)



Joonis 3.1: Sõnade hulga alamhulgad

Definitsioon 3.5. Olgu Γ teooria $\mathcal{T}$ mingi valemite hulk ja $\mathcal{A}$ selle teooria valem. Öeldakse, et valem $\mathcal{A}$ **järeldub** ehk **on tuletatav** valemite hulgast Γ ja tähistatakse $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, kui leidub selline lõplik valemite jada $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, kus viimaseks valemiks $\mathcal{A}_n$ on valem $\mathcal{A}$ ning iga valem $\mathcal{A}_i$ on kas aksioom või valem hulgast Γ või vahetu järeldus valemite $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{i-1}$ hulka kuuluvatest valemitest ning $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$. Valemite jada $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ nimetatakse seejuures valemi $\mathcal{A}$ **tuletuseks** valemite hulgast Γ .

Kui $\Gamma = \{\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m\}$, siis tähise $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ asemel kasutatakse tähist

$$\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m \vdash \mathcal{A}.$$

Eelnevatest definitsioonidest järeldub, et kui $\Gamma = \emptyset$, siis $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ parajasti siis, kui $\mathcal{A}$ on teooria $\mathcal{T}$ teoreem. Tähise $\emptyset \vdash \mathcal{A}$ asemel kasutatakse tähist $\vdash \mathcal{A}$. Seega tähis $\vdash \mathcal{A}$ tähendab asjaolu, et valem $\mathcal{A}$ on teoreem. Loetleme mõned järelduvuse lihtsamad omadused, mis tulenevad vahetult eelnevatest definitsioonidest.

Omadus 3.6. Kui $\Gamma \subset \Delta$ ja $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, siis $\Delta \vdash \mathcal{A}$.

Omadus 3.7. $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ parajasti siis, kui hulgast Γ leidub lõplik alamhulk Δ nii, et $\Delta \vdash \mathcal{A}$.

Omadus 3.8. Kui $\Delta \vdash \mathcal{A}$ ja $\Gamma \vdash \mathcal{B}$ iga $\mathcal{B} \in \Delta$ korral, siis $\Gamma \vdash \mathcal{A}$.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 60 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Omadus 3.9. Kui tuletusreeglis

$$\frac{\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n}{\mathcal{B}}$$

valemid $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ on kas aksioomid või teoreemid, siis valem $\mathcal{B}$ on teoreem.

Omadus 3.10. Kui $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$ ja $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, siis $\Gamma \vdash \mathcal{B}$.

3.3. Lausearvutus formaalse aksiomaatilise teooriana

Käesolevas alajaotuses esitame ühe võimaluse lausearvutuse esitamiseks formaalse aksiomaatilise teooriana. Selle teooria tuletavateks valemiteks ehk teoreemideks on parajasti samaselt tõesed valemid ehk tautoloogiad. Tähistame saadud teooriat sümboliga $\mathcal{L}$. Teooria $\mathcal{L}$ kirjeldamiseks peame esmalt loetlema selle teooria tähestiku, valemid, aksioomid ja tuletusreeglid.

1. Teooria $\mathcal{L}$ tähestik.

Teooria $\mathcal{L}$ tähestiku moodustavad

- lausemuutujad: tähed $X, Y, Z, \dots$ ja samad tähed naturaalarvuliste alaindeksitega;
- loogiliste tehete sümbolid: $\neg$ ja $\rightarrow$;
- eraldajad: sulud $($ ja $)$.

2. Teooria $\mathcal{L}$ valemid.

Teooria $\mathcal{L}$ valemid defineeritakse tingimustega:

- kõik lausemuutujad on valemid;
- kui $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on valemid, siis ka $(\neg \mathcal{A})$ ja $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$ on valemid;
- valemiteks on ainult sõnad, mis on saadud punktide a) ja b) korduval rakendamisel ¹⁰.

3. Teooria $\mathcal{L}$ aksioomid.

Teooria $\mathcal{L}$ aksioomideks on parajasti valemid

A1. $(\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$,

A2. $((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C})))$,

¹⁰Sümbolid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ pole teooria $\mathcal{L}$ sümbolid, vaid neid kasutatakse teooria $\mathcal{L}$ kirjeldamiseks.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 61 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

A3. $((\neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{A})) \rightarrow (((\neg \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}),$

kus $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ on teooria $\mathcal{L}$ mis tahes valemid.

Näide 3.11. Võttes valemiteks $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ valemid

$$\mathcal{A} = (X \rightarrow Y), \quad \mathcal{B} = (\neg Y), \quad \mathcal{C} = X,$$

saadakse **A1** ja **A2** alusel aksioomid

$$((X \rightarrow Y) \rightarrow ((\neg Y) \rightarrow (X \rightarrow Y)))$$

ja

$$\begin{aligned} &(((X \rightarrow Y) \rightarrow ((\neg Y) \rightarrow X)) \rightarrow (((X \rightarrow Y) \\ &\rightarrow (\neg Y)) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow X))). \end{aligned}$$

4. Teooria $\mathcal{L}$ tuletusreeglid.

Ainsaks teooria $\mathcal{L}$ tuletusreegliks on **modus ponens**:

$$\frac{\mathcal{A}, (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})}{\mathcal{B}}$$

kus $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on mis tahes valemid. Modus ponensi kohaselt valem $\mathcal{B}$ järeldub vahetult valemitest $\mathcal{A}$ ja $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$.

Märgime, et teorial $\mathcal{L}$ on aksioome lõpmata palju, sest tingimustes **A1**–**A3** võib valemid $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ valida lõpmata paljul erineval viisil. Järgnevalt on meie eesmärgiks näidata, et saadud teooria $\mathcal{L}$ kõigi tuletatavate valemite klass ehk teoreemide klass langeb kokku tautoloogiate ehk samaselt tõeste lausearvutuse valemite klassiga.

Ülejäänud loogilised tehted $\wedge$, $\vee$ ja $\sim$ defineeritakse juba tehete $\neg$ ja $\rightarrow$ kaudu, arvestades lausearvutuses saadud loogilisi samaväärsusi:

D1. $(\mathcal{A} \wedge \mathcal{B})$ tähistab valemit $(\neg(\mathcal{A} \rightarrow (\neg \mathcal{B})))$,

D2. $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$ tähistab valemit $((\neg \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B})$,

D3. $(\mathcal{A} \sim \mathcal{B})$ tähistab valemit $((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}))$.

Järgnevalt tõestame terve rida väiteid teooria $\mathcal{L}$ kohta. Seejuures me ei saa tõestatavaid väiteid nimetatada teoreemideks, sest sõna "teoreem" tähendab formaliseeritud aksiomaatiliste teooriate käsitle-

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 62 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

misel selle teooria tuletatavaid valemeid. Seetõttu nimetame siinkohal tõestatavaid väiteid **lauseteks** või **lemmadeks**. Lauseteks nimetame olulisemaid väiteid. Lemmad on abiväited lausete tõestamiseks. Edaspidi kasutame jälle sulgude arvu vähendamiseks esimeses paragrahvis tehtud kokkuleppeid.

Edaspidi vajatakse järgnevat kahte lemmat.

Lemma 3.12. $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ iga valemi $\mathcal{A}$ korral.

Tõestus. Valemi $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ tuletus $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5$ on:

- (1) $\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$
(aksioomis A2 võeti $\mathcal{B} = \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ ja $\mathcal{C} = \mathcal{A}$);
- (2) $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A})$ (aksioomis A1 võeti $\mathcal{B} = \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$);
- (3) $\mathcal{A}_3 = (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$
(vahetu järeldus valemitest $\mathcal{A}_1$ ja $\mathcal{A}_2$ modus ponensi abil);
- (4) $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$
(aksioomis A1 võeti $\mathcal{B} = \mathcal{A}$);
- (5) $\mathcal{A}_5 = \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$
(vahetu järeldus valemitest $\mathcal{A}_3$ ja $\mathcal{A}_4$ modus ponensi abil).

Lemma 3.12 on tõestatud.

Lemma 3.13. Kui $\Gamma \vdash \mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ on mis tahes valem, siis $\Gamma \vdash \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.

Tõestus. Kuna $\Gamma \vdash \mathcal{A}$, siis leidub valemi $\mathcal{A}$ tuletus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ valemite hulgast Γ . Seejuures $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$. Siis valemite jada $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})$, $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ on valemi $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tuletus valemite hulgast Γ . Lemma 3.13 on tõestatud.

3.4. Deduktsiooniteoreem

Jätkame teooria $\mathcal{L}$ käsitlemist deduktsiooniteoreemiga (siin sõna "teoreem" ei tähenda teooria $\mathcal{L}$ teoreemi).

Lause 3.14 (deduktsiooniteoreem). Olgu $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ teooria $\mathcal{L}$ valemid ning Γ teooria $\mathcal{L}$ mingi valemite hulk. Kui $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, siis $\Gamma \vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$. Erijuhul $\Gamma = \emptyset$ kehtib: kui $\mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$, siis $\vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 63 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tõestus. Eeldame, et $\Gamma, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}$. Olgu $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n$ valemi $\mathcal{B}$ tuletus valemite hulgast $\Gamma \cup \{\mathcal{A}\}$. Siis $\mathcal{B}_n = \mathcal{B}$. Näitame induktsiooniga arvu i järgi, et

$$\Gamma \vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i) \quad (3.1)$$

($1 \leq i \leq n$).

Olgu $i = 1$. Tuletuse definitsiooni kohaselt on kolm võimalust: 1) $\mathcal{B}_1 \in \Gamma$, 2) $\mathcal{B}_1$ on aksioom, 3) $\mathcal{B}_1 = \mathcal{A}$. Reegli **A1** põhjal on valem $\mathcal{B}_0 = (\mathcal{B}_1 \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_1))$ aksioom. Seepärast juhtudel 1) ja 2) on *modus ponensi* põhjal valem $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_1$ vahetu järeldus valemitest $\mathcal{B}_1$ ja $\mathcal{B}_0$ ning jada $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_0, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_1$ on tuletus järeldusele $\Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_1$. Juhul 3) lemma 3.12 tõttu $\vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_1$. Seega juhul $i = 1$ järelduvus (3.1) kehtib.

Eeldame nüüd, et $i > 1$ ja iga $k < i$ korral $\Gamma \vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_k)$. Valemi $\mathcal{B}_i$ jaoks on neli võimalust: 1) $\mathcal{B}_i$ on aksioom, 2) $\mathcal{B}_i \in \Gamma$, 3) $\mathcal{B}_i = \mathcal{A}$, 4) $\mathcal{B}_i$ on vahetu järeldus valemite $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_{i-1}$ hulka kuuluvatest valemitest, st leiduvad sellised $j < i$ ja $m < i$, et $\mathcal{B}_i$ järeldub *modus ponensi* põhjal valemitest $\mathcal{B}_j$ ja $\mathcal{B}_m = (\mathcal{B}_j \rightarrow \mathcal{B}_i)$. Juhtudel 1)-3) tõestatakse analoogiliselt juhuga $i = 1$ järelduvus $\Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i$. Neljandal juhul induktsiooni eelduse kohaselt

$$\Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_j, \quad (3.2)$$

$$\Gamma \vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_m) = (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B}_j \rightarrow \mathcal{B}_i)). \quad (3.3)$$

Reegli **A2** kohaselt

$$\vdash (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B}_j \rightarrow \mathcal{B}_i)) \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_j) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i)) = \mathcal{A}_0.$$

Kui

$$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s = (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_m) = (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B}_j \rightarrow \mathcal{B}_i))$$

on järelduvuse (3.3) tuletus, siis

$$\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s, \mathcal{A}_0, ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_j) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i)) = \mathcal{A}_1$$

on järelduvuse

$$\Gamma \vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_j) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i) \quad (3.4)$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 64 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

tuletus, sest *modus ponensi* põhjal valem $\mathcal{A}_1$ on vahetu järeldus valemite $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_m$ ja $\mathcal{A}_0$. Nüüd veelkord *modus ponensit* kasutades järeldub tingimustest (3.2) ja (3.4), et $\Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i$.¹¹ Vastavalt induktsiooniprintsiibile kehtib tingimus (3.1) iga $i \leq n$ korral. Järelikult $\Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_n$ ehk $\Gamma \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$. Lause on tõestatud.

Järeldus 3.15 (süllogismi reegel). $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C} \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$.

Tõestus. Kehtib järelduvus

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{C}. \quad (3.5)$$

Selle järelduvuse tuletus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_5$ on järgmine:

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$

$$\mathcal{A}_2 = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$$

$$\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}_4 = \mathcal{B} \text{ (vahetu järeldus valemite } \mathcal{A}_3 \text{ ja } \mathcal{A}_1 \text{ } \textit{modus ponensi} \text{ abil)}$$

$$\mathcal{A}_5 = \mathcal{C} \text{ (vahetu järeldus valemite } \mathcal{A}_4 \text{ ja } \mathcal{A}_2 \text{ } \textit{modus ponensi} \text{ abil).}$$

Järelduvusest (3.5) saadaksegi deduktsiooniteoreemi põhjal järelduse väide.

Järeldus 3.16. $\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{B} \vdash \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$.

Tõestus. Kõigepealt näitame, et

$$\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}), \mathcal{B}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{C}. \quad (3.6)$$

Järelduvuse (3.6) tuletus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_5$ on järgmine:

$$\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}$$

$$\mathcal{A}_2 = (\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}))$$

$$\mathcal{A}_3 = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \text{ (vahetu järeldus valemite } \mathcal{A}_1 \text{ ja } \mathcal{A}_2 \text{ } \textit{modus ponensi} \text{ abil)}$$

$$\mathcal{A}_4 = \mathcal{B}$$

$$\mathcal{A}_5 = \mathcal{C} \text{ (vahetu järeldus valemite } \mathcal{A}_4 \text{ ja } \mathcal{A}_3 \text{ } \textit{modus ponensi} \text{ abil).}$$

Järelduse väide järeldub nüüd järelduvusest (3.6) deduktsiooniteoreemi põhjal. Järeldus on tõestatud.

¹¹Selle järelduvuse tuletus on $\mathcal{C}_1, \dots, \mathcal{C}_s, \mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_t, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_i$, kus $\mathcal{D}_1, \dots, \mathcal{D}_t = \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}_j$ on järelduvuse (3.1) tuletus.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 65 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lemma 3.17. *Teooria $\mathcal{L}$ mis tahes valemite $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{B}$ korral järgmised seitse valemit on teooria $\mathcal{L}$ teoreemid:*

- (1) $\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$
- (2) $\mathcal{A} \rightarrow \neg\neg\mathcal{A}$
- (3) $\neg\mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$
- (4) $(\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$
- (5) $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{A})$
- (6) $\mathcal{A} \rightarrow (\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}))$
- (7) $(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow ((\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B})$

Tõestus. Esitame väidete (1)-(7) jaoks tuletused $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$, märkides sulgudes valemi $\mathcal{A}_i$ järel, mille põhjal see valem järeldub eelnevatest valemitest $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_{i-1}$.

- (1) $\mathcal{A}_1 = ((\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg\neg\mathcal{A}) \rightarrow ((\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}))$ (aksioom **A3**)
 $\mathcal{A}_2 = (\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{A})$ (lemma 3.12)
 $\mathcal{A}_3 = ((\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg\neg\mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A})$ ($\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$, järeldus 3.16)
 $\mathcal{A}_4 = (\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow (\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg\neg\mathcal{A}))$ (aksioom **A1**)
 $\mathcal{A}_5 = (\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A})$ ($\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3$, järeldus 3.15)
- (2) $\mathcal{A}_1 = ((\neg\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{A}) \rightarrow ((\neg\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \neg\neg\mathcal{A}))$ (aksioom **A3**)
 $\mathcal{A}_2 = (\neg\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \neg\mathcal{A})$ ((1))
 $\mathcal{A}_3 = ((\neg\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \neg\neg\mathcal{A})$ ($\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1$, *modus ponens*)
 $\mathcal{A}_4 = (\mathcal{A} \rightarrow (\neg\neg\neg\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}))$ (aksioom **A1**)
 $\mathcal{A}_5 = (\mathcal{A} \rightarrow \neg\neg\mathcal{A})$ ($\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_3$, järeldus 3.15)
- (3) Näitame, et

$$\neg\mathcal{A}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}. \quad (3.7)$$

Järelduvuse (3.7) tuletus on:

- $$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= \neg\mathcal{A} \\ \mathcal{A}_2 &= \mathcal{A} \\ \mathcal{A}_3 &= (\mathcal{A} \rightarrow (\neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})) \text{ (aksioom A1)} \\ \mathcal{A}_4 &= (\neg\mathcal{A} \rightarrow (\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{A})) \text{ (aksioom A1)} \\ \mathcal{A}_5 &= (\neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \text{ (}\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \text{modus ponens)} \\ \mathcal{A}_6 &= (\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{A}) \text{ (}\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_4, \text{modus ponens)} \\ \mathcal{A}_7 &= ((\neg\mathcal{B} \rightarrow \neg\mathcal{A}) \rightarrow ((\neg\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B})) \text{ (aksioom A3)} \end{aligned}$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 66 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_8 &= ((\neg \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}) \ (\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7, \textit{modus ponens}) \\ \mathcal{A}_9 &= \mathcal{B} \ (\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_8, \textit{modus ponens}).\end{aligned}$$

Järelduvusest (3.7) järeldub deduktsiooniteoreemi põhjal

$$\neg \mathcal{A} \vdash (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}),$$

kust veelkord deduktsiooniteoreemi rakendades

$$\vdash (\neg \mathcal{A} \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})).$$

(4) Näitame, et

$$\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}, \mathcal{A} \vdash \mathcal{B}. \quad (3.8)$$

Järelduvuse (3.8) tuletus on:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}) \\ \mathcal{A}_2 &= \mathcal{A} \\ \mathcal{A}_3 &= ((\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}) \rightarrow ((\neg \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B})) \ (\text{aksioom } \mathbf{A3}) \\ \mathcal{A}_4 &= (\mathcal{A} \rightarrow (\neg \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A})) \ (\text{aksioom } \mathbf{A1}) \\ \mathcal{A}_5 &= ((\neg \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}) \ (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, \textit{modus ponens}) \\ \mathcal{A}_6 &= (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \ (\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_5, \text{järeldus 3.15}) \\ \mathcal{A}_7 &= \mathcal{B} \ (\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_6, \textit{modus ponens}).\end{aligned}$$

Avaldisele (3.8) kaks korda deduktsiooniteoreemi rakendades saadaksegi

$$\vdash (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}).$$

(5) Järelduvuse

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \vdash \neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A} \quad (3.9)$$

tuletus on:

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \\ \mathcal{A}_2 &= (\neg \neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \ ((1)) \\ \mathcal{A}_3 &= (\neg \neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \ (\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_1, \text{järeldus 3.15}) \\ \mathcal{A}_4 &= (\mathcal{B} \rightarrow \neg \neg \mathcal{B}) \ ((2)) \\ \mathcal{A}_5 &= (\neg \neg \mathcal{A} \rightarrow \neg \neg \mathcal{B}) \ (\mathcal{A}_3, \mathcal{A}_4, \text{järeldus 3.15}) \\ \mathcal{A}_6 &= ((\neg \neg \mathcal{A} \rightarrow \neg \neg \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A})) \ ((4)) \\ \mathcal{A}_7 &= (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}) \ (\mathcal{A}_5, \mathcal{A}_6, \textit{modus ponens}).\end{aligned}$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 67 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Omadusest (3.9) järeldub deduktsiooniteoreemi põhjal väidetav omadus.

(6) *Modus ponensi* põhjal $\mathcal{A}, \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \vdash \mathcal{B}$. Siit kaks korda deduktsiooniteoreemi rakendades

$$\vdash (\mathcal{A} \rightarrow ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B})). \quad (3.10)$$

Asendades omaduses (5) valemi $\mathcal{A}$ valemiga $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$, saadakse

$$\vdash (((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg(\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}))). \quad (3.11)$$

Tingimustest (3.10) ja (3.11) saadaksegi järelduse 3.15 põhjal väidetav omadus.

(7) Järelduvuse

$$\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}, \neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \vdash \mathcal{B} \quad (3.12)$$

tuletus on:

$$\mathcal{A}_1 = (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$

$$\mathcal{A}_2 = (\neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$$

$$\mathcal{A}_3 = ((\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A})) \text{ ((5))}$$

$$\mathcal{A}_4 = (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}) \text{ } (\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_3, \text{modus ponens})$$

$$\mathcal{A}_5 = ((\neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}) \rightarrow (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \neg \mathcal{A})) \text{ ((5))}$$

$$\mathcal{A}_6 = (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \neg \mathcal{A}) \text{ } (\mathcal{A}_2, \mathcal{A}_5, \text{modus ponens})$$

$$\mathcal{A}_7 = ((\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \neg \mathcal{A}) \rightarrow ((\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B})) \text{ (aksioom A3)}$$

$$\mathcal{A}_8 = ((\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{B}) \text{ } (\mathcal{A}_6, \mathcal{A}_7, \text{modus ponens})$$

$$\mathcal{A}_9 = \mathcal{B} \text{ } (\mathcal{A}_4, \mathcal{A}_8, \text{modus ponens}).$$

Omadusest (3.12) järeldubki kaks korda deduktsiooniteoreemi rakendades väidetav omadus.

Lemma on tõestatud.

3.5. Täielikkuse teoreem

Käesolevas alajaotuses näitame, et teooria $\mathcal{L}$ valem $\mathcal{A}$ on selle teooria teoreem ehk tuletatav valem parajasti siis, kui $\mathcal{A}$ on tautoloogia. Selleks tõestame järgnevas laused 3.18 ja 3.20.

Lause 3.18. *Teooria $\mathcal{L}$ iga teoreem on tautoloogia.*

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 68 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tõestus. Leides aksioomides **A1**, **A2** ja **A3** esitatud valemite tõeväärtustabelid (teha seda iseseisvalt), näeme, et need valemid on samaselt tõesed ehk tautoloogiad. Teiselt poolt, kui valemid $\mathcal{A}$ ja $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ on tautoloogiad, siis implikatsiooni definitsiooni tõttu ka valem $\mathcal{B}$ on tautoloogia, st tuletusreegli *modus ponensiga* tautoloogia-test tuletatud valem on tautoloogia. Kui nüüd teooria $\mathcal{L}$ valem $\mathcal{A}$ on teoreem, siis talle leidub tuletus $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n = \mathcal{A}$, kus iga valem on kas aksioom või eelnevatest valemitest saadud tuletusreegliga *modus ponens*. Ülalöeldu põhjal on valemid $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n$ tautoloogiad, st valem $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}$ on tautoloogia. Lause on tõestatud.

Olgu $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ teooria $\mathcal{L}$ valem, milles sisalduvad lausemuutujad on $X_1, \dots, X_n$. Tähistagu $\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n)$ valemi $\mathcal{A}$ tõeväärtust, kui muutujate $X_1, \dots, X_n$ tõeväärtusteks on valitud vastavalt $x_1, \dots, x_n$. Veel tähistagu lausemuutuja X ja tõeväärtuse $x \in \{0, 1\}$ korral

$$X^x = \begin{cases} X, & \text{kui } x = 1, \\ \neg X, & \text{kui } x = 0. \end{cases}$$

Lemma 3.19. Olgu $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ teooria $\mathcal{L}$ mis tahes valem. Fikseerime lausemuutujate $X_1, \dots, X_n$ mis tahes tõeväärtused $x_1, \dots, x_n$ ja tähistame

$$\mathcal{A}^* = \begin{cases} \mathcal{A}, & \text{kui } \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = 1, \\ \neg \mathcal{A}, & \text{kui } \mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Siis

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \mathcal{A}^*.$$

Tõestus. Lemma tõestatakse induktsiooniga valemis $\mathcal{A}$ sisalduvate tehtemärkide arvu k järgi. Oletame, et $k = 0$. See on võimalik ainult juhul, kui $\mathcal{A} = X_1$. Kui $x_1 = 1$, siis $X_1^{x_1} = X_1$, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ ja $X_1 \vdash X_1$ tõttu $X_1^{x_1} \vdash \mathcal{A}^*$. Kui $x_1 = 0$, siis $X_1^{x_1} = \neg X_1$, $\mathcal{A}(x_1) = 0$, $\mathcal{A}^* = \neg \mathcal{A} = \neg X_1$ ja $\neg X_1 \vdash \neg X_1$ tõttu $X_1^{x_1} \vdash \mathcal{A}^*$. Seega juhul $k = 0$ lemma väide kehtib.

Eeldame nüüd, et $k > 0$ ja arvust k väiksemate tehtemärkide arvuga valemite jaoks lemma väide kehtib. Valem $\mathcal{A}$ avaldub siis kas kujul $\mathcal{A} = \neg \mathcal{B}$ või kujul $\mathcal{A} = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$, kus $\mathcal{B}$ ja $\mathcal{C}$ on teooria $\mathcal{L}$ mingid valemid, kus on vähem kui k tehtemärki.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#) [▶▶](#)
[◀](#) [▶](#)

Lk 69 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Oletame, et $\mathcal{A} = \neg\mathcal{B}$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$. Kui $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n) = 1$, siis

$$\mathcal{A}^* = \neg\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}^* = \mathcal{B},$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \mathcal{B} \text{ (induktsiooni eelduse kohaselt),}$$

$$\vdash \mathcal{B} \rightarrow \neg\neg\mathcal{B} \text{ (lemma 3.17 (2))}$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \neg\neg\mathcal{B} = \neg\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \text{ (kahest eelmisest avaldisest } \textit{modus ponensi} \text{ abil).}$$

Kui $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n) = 0$, siis $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ ja induktsiooni eelduse põhjal

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \mathcal{B}^* = \neg\mathcal{B} = \mathcal{A} = \mathcal{A}^*.$$

Seega juhul $\mathcal{A} = \neg\mathcal{B}$ lemma väide kehtib.

Oletame nüüd, et $\mathcal{A} = (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})$. Siis on võimalikud kolm erinevat juhtu: a) $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n) = 0$, b) $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_n) = 1$, c) $\mathcal{B}(x_1, \dots, x_n) = 1$ ja $\mathcal{C}(x_1, \dots, x_n) = 0$. Juhul a) saadakse

$$\mathcal{A}(x_1, \dots, x_n) = 1, \quad \mathcal{A}^* = \mathcal{A}, \quad \mathcal{B}^* = \neg\mathcal{B},$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \neg\mathcal{B} \text{ (induktsiooni eelduse kohaselt),}$$

$$\vdash \neg\mathcal{B} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \text{ (lemma 3.17 (3))},$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) = \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \text{ (kahest eelmisest avaldisest } \textit{modus ponensi} \text{ põhjal).}$$

Juhul b) saadakse

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A}, \quad \mathcal{C}^* = \mathcal{C},$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \mathcal{C} \text{ (induktsiooni eelduse tõttu),}$$

$$\vdash \mathcal{C} \rightarrow (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \text{ (aksioom A1),}$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash (\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) = \mathcal{A} = \mathcal{A}^* \text{ (kahest eelmisest avaldisest } \textit{modus ponensi} \text{ põhjal).}$$

Juhul c) saadakse

$$\mathcal{A}^* = \neg\mathcal{A}, \quad \mathcal{B}^* = \mathcal{B}, \quad \mathcal{C}^* = \mathcal{C},$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \mathcal{B} \text{ (induktsiooni eelduse põhjal),}$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \neg\mathcal{C} \text{ (induktsiooni eelduse põhjal),}$$

$$\vdash \mathcal{B} \rightarrow (\neg\mathcal{C} \rightarrow \neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C})) \text{ (lemma 3.17 (6))},$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \neg\mathcal{C} \rightarrow \neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) \text{ (teisest ja eelmisest avaldisest } \textit{modus ponensi} \text{ põhjal),}$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \neg(\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}) = \neg\mathcal{A} = \mathcal{A}^* \text{ (kolmandast ja eelmisest avaldisest } \textit{modus ponensi} \text{ põhjal).}$$

On näidatud, et kõigil kolmel võimalikul juhul a), b) ja c) kehtib lemma väide. Vastavalt induktsiooniprintsiibile kehtib lemma väide teooria $\mathcal{L}$ iga valemi $\mathcal{A}$ korral. Lemma on tõestatud.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 70 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lause 3.20 (täielikkuse teoreem). *Kui teooria $\mathcal{L}$ valem $\mathcal{A}$ on tautoloogia, siis valem $\mathcal{A}$ on teooria $\mathcal{L}$ teoreem.*

Tõestus. Olgu teooria $\mathcal{L}$ valem $\mathcal{A} = \mathcal{A}(X_1, \dots, X_n)$ tautoloogia. Valime lausemuutujate $X_1, \dots, X_n$ mis tahes tõeväärtused $x_1, \dots, x_n$. Kuna $\mathcal{A}$ on tautoloogia, siis $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Lemma 3.19 kohaselt

$$X_1^{x_1}, \dots, X_n^{x_n} \vdash \mathcal{A}.$$

Siit saadakse juhul $x_n = 1$ avaldis

$$X_1^{x_1}, \dots, X_{n-1}^{x_{n-1}}, X_n \vdash \mathcal{A}$$

ja juhul $x_n = 0$ avaldis

$$X_1^{x_1}, \dots, X_{n-1}^{x_{n-1}}, \neg X_n \vdash \mathcal{A}.$$

Nendest avaldistest saadakse deduktsiooniteoreemi põhjal

$$X_1^{x_1}, \dots, X_{n-1}^{x_{n-1}} \vdash (X_n \rightarrow \mathcal{A}), \quad (3.13)$$

$$X_1^{x_1}, \dots, X_{n-1}^{x_{n-1}} \vdash (\neg X_n \rightarrow \mathcal{A}). \quad (3.14)$$

Lemma 3.17 (7) ja avaldise (3.13) põhjal

$$X_1^{x_1}, \dots, X_{n-1}^{x_{n-1}} \vdash (\neg X_n \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}. \quad (3.15)$$

Avaldistest (3.14) ja (3.15) järeldeb

$$X_1^{x_1}, \dots, X_{n-1}^{x_{n-1}} \vdash \mathcal{A}.$$

Analoogiliselt jätkates saadakse

$$X_1^{x_1}, \dots, X_{n-2}^{x_{n-2}} \vdash \mathcal{A}$$

jne.. Lõpuks saadakse $\vdash \mathcal{A}$. Lause on tõestatud.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#) [▶▶](#)
[◀](#) [▶](#)
[Lk 71 / 247](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

3.6. Teisi formaalseid aksiomaatilisi teooriaid

I Predikaatarvutus

Selle teooria sümbolid, valemid, aksioomid ja tuletusreeglid on:

Sümbolid, valemid - defineeriti, käsitledes esimest järku keeli.

Aksioomid:

- Lausearvutuse $\mathcal{L}$ aksioomid **A1, A2, A3**.
- **A4.** $\forall x \mathcal{A}(x) \rightarrow \mathcal{A}(t)$, kus x on vaba muutuja valemis $\mathcal{A}$ ja t on mis tahes term, mis ei sisalda muutujat x .
- **A5.** $\forall x (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}(x)) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \forall y \mathcal{B}(y))$, kus $\mathcal{A}$ ei sisalda muutujaid x ja y .

Tuletusreeglid:

- Modus ponens.
- Üldistamine:

$$\frac{\mathcal{A}}{\forall x \mathcal{A}}$$

Ka predikaatarvutuse jaoks kehtib teoreem täielikkusest.

II Matemaatilised teooriad $\mathcal{T}$

Siin sümbolid, valemid, aksioomid ja tuletusreeglid on samad, mis predikaatarvutuses, ainult lisaks tulevad teooria $\mathcal{T}$ nn **omaaksioomid**, st aksioomid, mis määravad vaadeldava teooria. Signatuur tuleb valida nii, et oleks võimalik kirja panna omaaksioome. Teooria arendamine seisneb selles teoorias tuletatavate valemite ehk teoreemide leidmises. Järgnevalt esitame kaks näidet matemaatiliste teooriate kohta.

III Osaliselt järjestatud hulkade teooria

Selle teooria omaaksioomideks on:

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 72 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- **O1.** $\forall x(x \leq x)$ (refleksiivsus)
- **O2.** $\forall x \forall y \forall z(((x \leq y) \wedge (y \leq z)) \rightarrow (x \leq z))$ (transitiivsus)
- **O3.** $\forall x \forall y(((x \leq y) \wedge (y \leq x)) \rightarrow (x = y))$ (antisümmeetria)

Saadud teooria iga interpretatsiooni, kus kõik selle teooria aksioomid on tõesed, nimetatakse **osaliselt järjestatud hulgaks**.

IV Rühmateooria $\mathcal{R}$

Selle teooria omaaksioomideks on:

- **R1.** $\forall x \forall y \forall z(x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z)$ (assotsiatiivsus)
- **R2.** $\forall x((x \cdot e) \wedge (e \cdot x = x))$ (ühiku olemasolu)
- **R3.** $\forall x \exists y((x \cdot y = e) \wedge (y \cdot x = e))$ (pöördelemendi olemasolu)

Saadud teooria iga interpretatsiooni, kus kõik selle teooria aksioomid on tõesed, nimetatakse **rühmaks**.

3.7. Formaalse aksiomaatilise teooriaga seotud mõisteid

Vaadelgem mis tahes formaalset aksiomaatilist teooriat $\mathcal{T}$. Andes teooria $\mathcal{T}$ sümbolitele väärtused konkreetsel hulgal M , saadakse teooria $\mathcal{T}$ **mudel**. Antud teorial võib mudeleid olla palju. Tekkinud mudelis loetakse tõesteks need teooria $\mathcal{T}$ valemid, mis on aksioomid või tuletatavad valemid ehk teoreemid.

Formaalseid aksiomaatilisi teooriaid võib põhimõtteliselt konstrueerida suvaliselt, kuid ajalooliselt on välja kujunenud teatavad loomulikud nõuded, mida peaks rahuldama formaalne aksiomaatiline teooria.

Tavaliselt eelneb mingi matemaatilise teooria aksiomaatilisele käsitlusele selle teooria mitteaksiomaatiline areng. Teooria teataval arenguetaapil tekib vajadus üle vaadata selle teooria põhitõed, kuna on kerkinud esile terve rida paradokse, mida olemasoleva käsitluse raames pole võimalik lahendada. Teooria korrastamise käigus tehakse kindlaks selle teooria põhitõed, milles keegi ei kahtle. Nii tekibki vaadeldava matemaatilise teooria baasil formaalne aksiomaatiline teooria

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 73 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$\mathcal{T}$. Teooria $\mathcal{T}$ sümboliteks valitakse loogika sümbolid ja vaadeldava matemaatilise teooria sümbolid. Teooria $\mathcal{T}$ aksioomideks aga valitakse vaadeldava matemaatilise teooria põhitõed (väljendatuna valemite kujul). Teooria $\mathcal{T}$ tuletatavateks valemiteks ehk teoreemideks on siis vaadeldava matemaatilise teooria tõesed väited. Tekkinud aksiomaatilise teooria $\mathcal{T}$ üheks mudeliks on esialgne matemaatiline teooria (nn põhimudel ehk standardmudel) aga tal võib olla ka teisi mudeleid, mis pole matemaatiliselt samaväärne (isomorfne) põhimudeliga. Nii on näiteks tekkinud aritmeetika ja hulgateooria aksiomaatilised käsitlused. ^{12 13}

Kasutust on leidnud ka teine lähenemisviis formaalsetele aksiomaatilistele teooriatele. Selle lähenemisviisi korral valitakse formaalse aksiomaatilise teooria sümbolid, aksioomid ja tuletusreeglid vabalt ning teooria arendamine seisneb selle teooria tuletatavate valemite ehk teoreemide leidmises. Põhiline on seejuures, et saadud teooria poleks vastuoluline (st tal leiduks mudel).

Loetleme järgnevalt konspektiivselt formaalse aksiomaatilise teooriaga $\mathcal{T}$ seotud mõisteid ja mõningaid fakte.

Teooriat $\mathcal{T}$ nimetatakse **mittevasturääkivaks**, kui mitte ühegi valemi $\mathcal{A}$ korral pole samaaegselt tuletatav nii $\mathcal{A}$ kui ka $\neg\mathcal{A}$.

Teooriat $\mathcal{T}$ nimetatakse **täielikuks**, kui selle teooria iga kinnise valemi $\mathcal{A}$ korral kas $\vdash \mathcal{A}$ või $\vdash \neg\mathcal{A}$. Kui teooriatel $\mathcal{T}$ ja $\mathcal{T}'$ on ühed ja samad sümbolid ning teooria $\mathcal{T}$ iga teoreem on ka teooria $\mathcal{T}'$ teoreem, siis teooriat $\mathcal{T}'$ nimetatakse teooria $\mathcal{T}$ **laiendiks**.

Lemma 3.21 (Lindenbaumi lemma). *Kui esimest järku teooria $\mathcal{T}$ on mittevasturääkiv, siis tal leidub mittevasturääkiv täielik laiend.*

Teooria $\mathcal{T}$ **täielikkus kitsamas mõttes** tähendab asjaolu, et mistahes mittetuletatava valemi lisamine aksioomina muudab saadud teooria vasturääkivaks.

¹²Hulgateoorias ilmnenu paradoksidest mainime siinjuures näitena B.Russell'i poolt 1902.a. esitatud paradoksi, mis seisneb järgnevas. Olgu A selliste hulkade X hulk, mille korral $X \notin X$. Kui $A \in A$, siis hulga A definitsiooni kohaselt $A \notin A$. Kui $A \notin A$, siis hulga A definitsiooni kohaselt $A \in A$.

¹³Bertrand Russell (1872-1970) – inglise filosoof ja loogik; pälvis 1950.a Nobeli preemia esseistika eest; oli ka tuntud patsifismi propageerija.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 74 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Vaadeldgem mingit signatuuri σ ja selle signatuuri valemid. Valemit $\mathcal{A}$ nimetatakse **loogiliselt tõeseks** ja tähistatakse

$$\models \mathcal{A},$$

kui ta on tõene iga interpretatsiooni korral. Kui Γ on mingi valemite hulk signatuuris σ , siis

$$\Gamma \models \mathcal{A}$$

tähistab asjaolu, et valem $\mathcal{A}$ on tõene igas interpretatsioonis milles on tõesed kõik hulka Γ kuuluvad valemid.

Olgu $\mathcal{M}$ struktuur signatuuris σ . Siis

$$\mathcal{M} \models \mathcal{A}$$

tähendab, et valem $\mathcal{A}$ on tõene struktuuril $\mathcal{M}$.

Struktuuri $\mathcal{M}$ **esimest järku teooriaks** ehk **elementaarteooriaks** nimetatakse kõigi sellel struktuuril tõeste valemite hulka

$$\text{Th}(\mathcal{M}) = \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ on valem signatuuris } \sigma, \mathcal{M} \models \mathcal{A} \}.$$

Struktuuride klassi $\mathcal{K}$ **esimest järku teooriaks** ehk **elementaarteooriaks** nimetatakse kõigil sellesse klassi kuuluvatel struktuuridel tõeste valemite hulka

$$\text{Th}(\mathcal{K}) = \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ on valem signatuuris } \sigma,$$

$$\mathcal{M} \models \mathcal{A} \text{ iga } \mathcal{M} \in \mathcal{K} \text{ korral} \}.$$

Kui $\text{Th}(\mathcal{M}_1) = \text{Th}(\mathcal{M}_2)$, siis öeldakse, et struktuurid $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ on **elementaarselt ekvivalentsed** ($\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ on struktuurid signatuuris σ).

Struktuuri $\mathcal{M}$ (struktuuride klassi $\mathcal{K}$) elementaarteooriat nimetatakse **lahenduvaks**, kui leidub algoritm, millega saab mistahes valemil puhul kontrollida, kas see valem kuulub struktuuri $\mathcal{M}$ (struktuuride klassi $\mathcal{K}$) elementaarteooriasse või mitte.

Lahenduvate elementaarteooriate näiteid:

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 75 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- Boole'i algebrate teooria
- Abeli rühmade teooria
- lõpliku signatuuri ja kandjaga struktuuri elementaarteooria
- reaalarvude järjestuse elementaarteooria (signatuur σ koosneb kahest sümbolist $=$ ja $<$)
- ratsionaalarvude järjestuse elementaarteooria (signatuur σ koosneb kahest sümbolist $=$ ja $<$)

Ratsionaalarvude järjestuse teooria ja reaalarvude järjestuse teooria on elementaarselt ekvivalentset.

Mittelahenduvate elementaarteooriate näiteid:

- esimest järku predikaatarvutus
- rühmateooria
- distributiivsete võrede teooria

Esimest järku teooriat $\mathcal{T}$ nimetatakse **võrdusega esimest järku teooriaks**, kui tema sümbolite seas esineb kahekohaline predikaatsümbol P , mida tavaliselt tähistatakse võrdusena ($P(x, y)$ asemel kirjutatakse $x = y$ ja $\neg P(x, y)$ asemel kirjutatakse $x \neq y$) ning sisaldab aksioome

A6. $\forall x (x = x)$

A7. $(x = y) \rightarrow (\mathcal{A}(x, x) \rightarrow \mathcal{A}(x, y)),$

kus $\mathcal{A}(x, x)$ on mis tahes valem vaba muutujaga x ja $\mathcal{A}(x, y)$ on valem, mis on saadud valemist $\mathcal{A}(x, x)$ osa muutuja x esinemiste asendamisel muutujaga y (valem $\mathcal{A}(x, x)$ ei tohi sisaldada muutujat y).

Lause 3.22. *Igas võrdusega esimest järku teoorias $\mathcal{T}$ kehtib:*

- 1) $\vdash t = t$ iga termi t korral,
- 2) $\vdash x = y \rightarrow y = x,$
- 3) $\vdash x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z).$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 76 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kui vaadata võrdusega teooria $\mathcal{T}$ mudelit $\mathcal{M}$ kandjaga M , siis predikaadile $=$ vastav seos Q hulgal M on ekvivalentsiseos sellel hulgal. Kui aga ekvivalentsiseos Q on võrdus hulgal M , siis mudelit $\mathcal{M}$ nimetatakse **normaalseks**.

3.8. Ülesandeid

3.1 Konstrueerides tuletuse, näidata, et lausearvutuses $\mathcal{L}$ kehtib $\vdash (\neg \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}$.

3.2 Konstrueerides tuletuse, näidata, et lausearvutuses $\mathcal{L}$ kehtib $\vdash (\neg \mathcal{B} \rightarrow \neg \mathcal{A}) \rightarrow (\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B})$.

[Autori koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 77 / 247](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

4. ALGORITMITEORIA ELEMENTE

4.1. Sissejuhatus

Juba iidsetest aegadest saadik on matemaatikas tegeldud mitmesuguste arvutustega, kus vajalikud suurused saadakse lähtesuurustest kindlate eeskirjade kohaselt. Näitena võib tuua kasvõi risküliku pindala leidmise. Aja jooksul hakati neid eeskirju nimetama **algoritmideks**. Üheks tuntumaks algoritmi näiteks on **Eukleidese algoritm**¹⁴ naturaalarvude a_1 ja a_2 suurima ühisteguri leidmiseks. Eukleidese algoritm seisneb järgnevas: 1) leitakse arvu a_1 jagamisel arvuga a_2 tekkiv jääk a_3 ; kui $a_3 = 0$, siis protsess lõpeb ja a_2 on otsitav suurim ühistegur; 2) kui $a_3 > 0$, siis leitakse arvu a_2 jagamisel arvuga a_3 tekkiv jääk a_4 ; kui $a_4 = 0$, siis protsess katkeb ja a_3 on otsitav suurim ühistegur; 3) kui $a_4 > 0$, siis leitakse arvu a_3 jagamisel arvuga a_4 tekkiv jääk a_5 jne.. Kuna $a_2 > a_3 > a_4 > \dots \geq 0$, siis kirjeldatud protsess katkeb vähemalt a_2 -nda sammu järel ja viimane nullist erinev arv selles jadas ongi arvude a_1 ja a_2 suurim ühistegur.

Ehkki algoritmi mõiste jäi intuiitivseks, ei esinenud kuni käesoleva sajandi alguseni tõsisemaid lahkkelisid otsustamisel, kas antud arvutusprotsess on algoritm või mitte. Sajandi algul tekkis aga matemaatikas rida ülesandeid, milledele ei osatud leida lahendust ja kaheldi, kas leidub üldse algoritmi nende ülesannete lahendamiseks. Vajaliku probleemi lahendamiseks algoritmi puudumise näitamiseks oli vaja algoritmi mõistet täpsustada. Selle sajandi kahekümnendail aastail hakati intensiivselt otsima sobivat käsitlust algoritmi mõistele. Vastus saadi D.Hilberti (1862-1943), K.Gödeli (1906-1978), A.Churchi (1903-1995), S.C.Kleene'i (1909-1994), E.L.Posti (1897-1954) ja A.M.Turingi (1912-1954) töödes. Refereerime järgnevalt nende poolt saadud tulemusi.

Algoritmiliste probleemide puhul tekib järgmist tüüpi ülesanne: leida algoritm täisarvulistest parameetritest $x_1, \dots, x_n$ sõltuva ülesande lahendamiseks, kusjuures vastuseks on samuti täisarv y . Teiste sõnadega öeldes, otsitakse algoritmi funktsiooni $y = f(x_1, \dots, x_n)$ väärtuste arvutamiseks. Funktsiooni, mille väärtuste arvutamiseks leidub ühtne algoritm, nimetatakse **arvutatavaks funktsiooniks**. Ku-

¹⁴Eukleides (u. 365-300 e.m.a.)

[Autori koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Lk 78 / 247

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

na algoritmi mõiste on intuitiivne ja täpselt formuleerimata, siis on seda ka arvutatava funktsiooni mõiste. K.Gödel (1931) ja A.Church (1936) konstrueerisid kindlate reeglite järgi funktsioonid, mida nimetatakse **rekursiivseteks funktsioonideks**. Samas püstitas A.Church hüpoteesi, mille kohaselt kõikjal määratud arvutatavate funktsioonide klass langeb kokku rekursiivsete funktsioonide klassiga. Seda hüpoteesi on hakatud nimetama **Churchi teesiks**. Churchi teesi tõestada ei saa, kuid pole õnnestunud leida näidet, mis lükkaks selle teesi ümber.

S.C.Kleene (1936) defineeris **osaliselt rekursiivse funktsiooni** mõiste ja püstitas hüpoteesi, et osaliselt rekursiivsete funktsioonide klass langeb kokku osaliste (st mitte kõikjal määratud) arvutatavate funktsioonide klassiga. Seda hüpoteesi nimetatakse **Kleene'i teesiks**. Kleene'i tees on üldisem kui Churchi tees. Üldlevinud on komme mitte kasutada terminit "Kleene'i tees" ja kasutada ka sel korral terminit "Churchi tees". Nii toimime meiegi edaspidi. Kasutades Churchi teesi, õnnestus A.Churchil 1936.a. tõestada, et ei leidu algoritmi, mis predikaatarvutuse suvalise valemi korral teeks kindlaks, kas see on samaselt tõene või mitte.

A.M.Turing ja E.L.Post püüdsid läheneda algoritmi mõistele teisi. Nad lähtusid ideest, et algoritmilised ülesanded on sellised, mida on võimeline lahendama sobivalt konstrueeritud "masinad". Nad konstrueerisidki 1936.a. teineteisest sõltumatult vastavad masinad arvutamiseks. Need masinad erinesid omavahel vähe ja neid on hakatud nimetama **Turingi masinateks**. Turingi masinatel on realiseeritud kõik matemaatikute poolt tuntud algoritmid. Õnnestus näidata, et Turingi masinaga arvutatavateks funktsioonideks on parajasti osaliselt rekursiivsed funktsioonid. See oli veelkordseks kinnituseks Churchi teesile.

Lisaks Turingi masinatele on konstrueeritud ka teisi temaga samaväärseid masinaid. Viimasel ajal on moes neid kõiki nimetada **automaatideks**. Automaate kasutatakse mitmesuguste probleemide lahendamiseks. Järgnevates alajaotustes kirjeldamegi mõningaid nendest probleemidest, anname automaadi definitsiooni, esitame Turingi masina kirjelduse ning vaatleme põgusalt ka rekursiivseid funktsioone.

[Autori koduleht](#)[Tiitelleht](#)[◀◀](#) [▶▶](#)[◀](#) [▶](#)

Lk 79 / 247

[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

4.2. Keel

Vaadelgem mingit lõplikku sümbolite hulka V . Hakkame hulka V edaspidi nimetama **tähestikuks**. **Sõnaks** ehk **stringiks** tähestikus V nimetatakse hulka V kuuluvate elementide lõplikku jada. Vaadeldakse ka **tühja sõna**, mis ei koosne ühestki sümbolist. Tühja sõna tähistatakse λ . Kõigi sõnade hulka tähestikus V tähistatakse V^* .

Näide 4.1. Olgu $V = \{ (,), 2, 3, +, =, 5 \}$. Siis järgnevad kolm avaldist on sõnad tähestikus V :

$$(2 + 3) = 5 \quad)2(+3 = (5) \quad === 5+)3($$

Definitsioon 4.2. Sõnade u ja v ($u, v \in V^*$) **korrutiseks** nimetatakse sõna $u \cdot v = uv$, mis saadakse sõnade u ja v üksteise järgi kirjutamises, st kui $u = s_1 \dots s_k$ ja $v = s_{k+1} \dots s_n$, siis $u \cdot v = uv = s_1 \dots s_k s_{k+1} \dots s_n$ ($s_1, \dots, s_n \in V$).

Näide 4.3. Näites 4.1 esitatud kahe esimese sõna korrutis on

$$(2 + 3) = 5)2(+3 = (5)$$

Sõnade korrutamine on assotsiatiivne, st

$$(uv)w = u(vw)$$

iga $u, v, w \in V^*$ korral. Seega on kõigi sõnade hulk V^* tähestikus V poolrühm¹⁵. Kuna $\lambda u = u\lambda = u$ iga $u \in V^*$ korral, siis on tühi sõna λ selle poolrühma ühikuks¹⁶. Nagu tavaliselt, võib selles poolrühmas defineerida ka iga sõna u jaoks tema n -nda astme:

$$u^n = \underbrace{uu \dots u}_n.$$

n korda

Definitsioon 4.4. Kõigi sõnade hulga V^* mis tahes alamhulka L nimetatakse **keeleks tähestikus** V .

¹⁵Algebras nimetatakse hulka ühe assotsiatiivse tehtega **poolrühmaks**.

¹⁶Ühikuga poolrühma nimetatakse algebras **monoidiks**.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 80 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Keeltega on teostatavad järgmised tehted:

1⁰ Hulgateoreetilised tehted: $L \cap M$, $L \cup M$, $L \setminus M$; $L, M \subset V^*$.

2⁰ Keelte L ja M korrutis:

$$LM = \{uv \mid u \in L, v \in M\}; \quad L, M \subset V^*.$$

3⁰ Astendamine:

$$L^0 = \{\lambda\}, \quad L^1 = L, \quad L^2 = LL, \quad L^{m+1} = L^m L \quad (m > 1).$$

4⁰ Keele L Kleene'i sulund L^* :

$$L^* = L^0 \cup L^1 \cup L^2 \cup \dots = \bigcup_{k=0}^{\infty} L^k.$$

5⁰ $L^+ = L^1 \cup L^2 \cup \dots = \bigcup_{k=1}^{\infty} L^k$.

Näide 4.5. Olgu $V = \{0, 1\}$, $L = \{1, 00\}$ ja $K = \{0, 11, 101\}$.
Leiame keelte L ja K korrutised LK ja KL :

$$LK = \{10, 111, 1101, 000, 0011, 00101\},$$

$$KL = \{01, 000, 111, 1100, 1011, 10100\}.$$

Näide 4.6. Olgu $V = \{0, 1\}$, $L = \{1, 00\}$. Siis

$$L^0 = \{\lambda\}, \quad L^1 = L = \{1, 00\}, \quad L^2 = \{11, 100, 001, 0000\},$$

$$L^3 = L^2 L = \{111, 1001, 0011, 00001, 1100, 10000, 00100, 000000\}.$$

4.3. Regulaarne keel

Olgu antud tähestik V . Defineerime *regulaarse avaldise* r ja selle poolt *tekitatud regulaarse keele* $L(r)$ (üle tähestiku V). Mõlemad defineeritakse induktiivselt.

Definitsioon 4.7. Regulaarseteks (üle V) nimetatakse järgmisi avaldisi:

- 1) tühi sõna λ ja tühi avaldis $()$ on regulaarsed avaldised;
- 2) iga sümbol a tähestikust V on regulaarne avaldis;
- 3) kui r on regulaarne avaldis, siis (r^*) on regulaarne avaldis;

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 81 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4) kui r_1 ja r_2 on regulaarsed avaldised, siis ka $(r_1 \vee r_2)$ on regulaarne avaldis;

5) kui r_1 ja r_2 on regulaarsed avaldised, siis ka $(r_1 r_2)$ on regulaarne avaldis.

Toodud definitsioonist on näha, et regulaarsed avaldised on kindla reegli järgi saadud sõnad tähestiku V sümbolitest ja tähestikku V mittekuuluvast viiest sümbolist

$$(\) \ * \ \vee \ \lambda$$

Definitsioon 4.8. Regulaarse avaldise r poolt tekitatud **regulaarne keel** $L(r)$ on:

- 1) $r = \lambda \implies L(r) = \{\lambda\}$,
- 2) $r = (\) \implies L(r) = \emptyset$,
- 3) $r = a \in V \implies L(r) = \{a\}$,
- 4) $r = u^* \implies L(r) = L(u^*) = (L(u))^*$ (Kleene'i sulund),
- 5) $r = r_1 \vee r_2 \implies L(r) = L(r_1) \cup L(r_2)$,
- 6) $r = r_1 r_2 \implies L(r) = L(r_1) L(r_2)$.

Definitsioon 4.9. Keelt L (üle V) nimetatakse **regulaarseks**, kui leidub selline regulaarne avaldis r (üle V), et $L = L(r)$.

Näide 4.10. Olgu $V = \{0, 1\}$. Siis:

- 1) $r = 1^* \implies L(r) = (L(1))^* = \{1^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\} = \{\lambda, 1, 11, 111, \dots\}$,
- 2) $r = 11^* \implies L(r) = L(1)L(1^*) = \{1\} \cdot (L(1))^* = \{1, 11, 111, \dots\}$,
- 3) $r = 0 \vee 1^* \implies L(r) = L(0) \cup L(1^*) = \{0\} \cup (L(1))^* = \{0, \lambda, 1, 11, 111, \dots\}$,
- 4) $r = (0 \vee 1)^* \implies L(r) = (L(0 \vee 1))^* = (L(0) \cup L(1))^* = (\{0\} \cup \{1\})^* = V^*$.

Näide 4.11. Vaatleme järgmisi keeli tähestikus $V = \{0, 1\}$:

$$L_1 = \{0^m 1^n \mid m > 0, n > 0\},$$

$$L_2 = \{1^m 01^n \mid m > 0, n > 0\},$$

$$L_3 = \{0^m 1^m \mid m > 0\}.$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 82 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Siis:

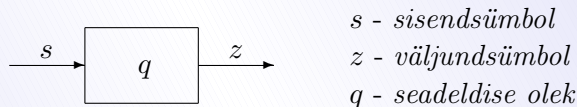
$$L_1 = L(r_1) = L(r_2), \text{ kus } r_1 = 00^*11^*, r_2 = 0^*011^*,$$

$$L_2 = L(r), \text{ kus } r = 11^*011^*.$$

Seega on keeled L_1 ja L_2 regulaarsed. Saab näidata, et keel L_3 pole regulaarne.

4.4. Lõplik automaat

Automaadi all mõistetakse selles kursuses seadeldist, mis sõltuvalt oma olekust töötleb sisendsümboli (signaali) ümber väljundsümboliks (signaaliks) ja läheb seejärel üle uude olekusse. Nii väljundsümbol kui ka seadeldise uus olek on üheselt määratud sisendsümboliga. Edasi asub seadeldis töötlemata järgmist sisendsümbolit. Skemaatiliselt:



Joonis 4.1: Sisendsümboli töötlemine väljundsümboliks

Kui sisend- ja väljundsümbolite hulk ning seadeldise olekute hulk on lõplikud, siis automaati nimetatakse **lõplikuks**. Meie vaatleme ainult lõplikke automaate ja anname nende matemaatilise kirjelduse.

Definitsioon 4.12. Lõplikuks automaadiks nimetatakse viisikut $\mathcal{A} = [S, Q, Z, \nu, \zeta]$, kus

- 1) $S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ on **sisendsümbolite** hulk,
- 2) $Z = \{z_0, z_1, \dots, z_m\}$ on **väljundsümbolite** hulk,
- 3) $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_r\}$ on **olekute** hulk,
- 4) $\nu : Q \times S \longrightarrow Q$ on **üleminekufunktsioon** (järgmisse olekusse),
- 5) $\zeta : Q \times S \longrightarrow Z$ on **väljundfunktsioon**.

Automaat $\mathcal{A}$ toimib järgmiselt. Automaadile esitatakse sisendsümbolite hulgast S sisendsümbolite lõplik jada (nn programm)

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

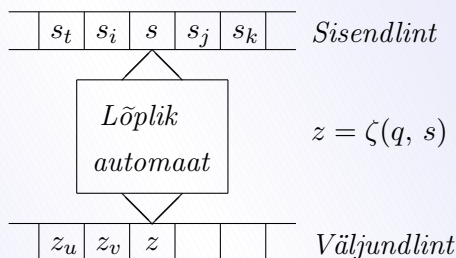
Lk 83 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$s_{j_1}, \dots, s_{j_t}$, mis "töödeldakse" funktsioonide ν ja ζ abil väljund-sümbolite lõplikuks jadaks $z_{i_1}, \dots, z_{i_t}$. Automaat, olles algselt olekus q_{k_1} , loeb esimese esitatud sisendsümboli s_{j_1} , väljastab funktsiooni-ga ζ esimese väljund-sümboli $z_{i_1} = \zeta(q_{k_1}, s_{j_1})$ ja läheb funktsiooniga ν üle uude olekusse $q_{k_2} = \nu(q_{k_1}, s_{j_1})$. Järgnevalt, olles juba olekus q_{k_2} , loeb automaat järgmise sisendsümboli s_{j_2} esitatud sisendsüm-bolite jadast (programmist), väljastab funktsiooniga ζ väljund-süm-boli $\zeta(q_{k_2}, s_{j_2}) = z_{i_2}$ ja läheb funktsiooniga ν üle uude olekusse $\nu(q_{k_2}, s_{j_2}) = q_{k_3}$. Analoogiliselt jätkates töödeldakse kõik sisendsüm-bolid $s_{j_1}, \dots, s_{j_t}$ vastavalt väljund-sümboliteks $z_{i_1}, \dots, z_{i_t}$. Automaat lõpetab töö, kui on töödeldud viimane sisendsümbolite jadas esinev sümbol.



Joonis 4.2: Lõplik automaat

Piltlikult on automaat kujutatud joonisel 4.2. Selles tõlgenduses on antud kaks linti, mis koosnevad ruutudest, kusjuures igasse ruutu on võimalik paigutada üks sümbol. Ühe lindi - nn **sisendlindi** - ruutudesse on paigutatud sisendsümbolite jada (programm), ja teise lindi - nn **väljundlindi** - ruutudesse paigutatakse (kirjutatakse) vastavate väljund-sümbolite jada. Automaat, olles olekus $q \in Q$, loeb sisendlindilt järjekordse sisendsümboli $s \in S$, kirjutab väljundlindile väljund-sümboli $z = \zeta(q, s) \in Z$, läheb üle uude olekusse $\nu(q, s)$ ja liigutab ühe ruudu võrra mõlemat linti edasi. Seejärel kordub sama tegevus järgmise sisendlindi ruudus asuva sümboliga.

Hiljem kirjeldame veel kahte lõpliku automaadi esitust - esitust graafina ja olekute tabelina. Esialgu aga toome näite lõplikust automaadist. Tavaliselt nummerdatakse automaadi olekud nii, et au-

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 84 / 247

Tagasi

Täisekraan

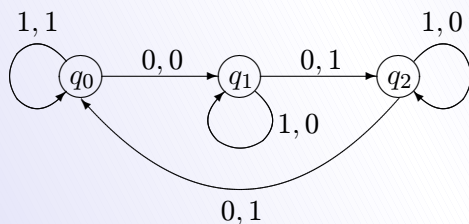
Lahku failist

tomaat alustab tööd olekust q_0 .

Näide 4.13. Vaatleme automaati $\mathcal{A} = [S, Q, Z, \nu, \zeta]$, kus $S = Z = \{0, 1\}$, $Q = \{q_0, q_1, q_2\}$ ja funktsioonid ν ning ζ on antud järgnevalt:

ν	:	$(q_0, 0) \mapsto q_1$	ζ	:	$(q_0, 0) \mapsto 0$
		$(q_0, 1) \mapsto q_0$			$(q_0, 1) \mapsto 1$
		$(q_1, 0) \mapsto q_2$			$(q_1, 0) \mapsto 1$
		$(q_1, 1) \mapsto q_1$			$(q_1, 1) \mapsto 0$
		$(q_2, 0) \mapsto q_0$			$(q_2, 0) \mapsto 1$
		$(q_2, 1) \mapsto q_2$			$(q_2, 1) \mapsto 0$

Valigem sisendsümbolite jadaks 1, 0, 1, 0 (e. lühidalt 1010) ja olgu automaat algselt olekus q_0 . Vaadeldav automaat loeb sisendlindilt esimese sümboli 1, kirjutab väljundlindile sümboli $\zeta(q_0, 1) = 1$ ja läheb üle olekusse $\nu(q_0, 1) = q_0$. Seejärel loeb automaat sisendlindilt järgmise sümboli 0, kirjutab väljundlindile sümboli $\zeta(q_0, 0) = 0$ ja läheb üle olekusse $\nu(q_0, 0) = q_1$. Nüüd loeb automaat sisendlindilt kolmanda sümboli 1, kirjutab väljundlindile sümboli $\zeta(q_1, 1) = 0$ ja läheb üle olekusse $\nu(q_1, 1) = q_1$. Lõpuks loeb automaat sisendlindilt viimase sümboli 0, kirjutab väljundlindile sümboli $\zeta(q_1, 0) = 1$ ja läheb üle olekusse $\nu(q_1, 0) = q_2$. Kokkuvõttes teisendab vaadeldav automaat sisestatava sümbolite jada 1010 sümbolite jadaks 1001. Lugeja võib veenduda, et jada 0101 teisendatakse selle automaadiga jadaks 0010.



Joonis 4.3: Automaadi kujutis graafina

Automaadi¹⁷ $\mathcal{A} = [S, Q, Z, \nu, \zeta]$ toimimine sisendsümbolite jadal

¹⁷Kuna me vaatleme ainult lõplikke automaate, siis jätame järgnevalt alati sõna "lõplik" lisamata.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 85 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

on täielikult määratud hulkadega S , Q ja Z ning funktsioonidega ν ja ζ . Vahel on sobiv ja näitlik kujutada automaati orienteeritud graafina¹⁸. Selle graafi tippudeks on automaadi $\mathcal{A}$ olekud ning funktsioonide ν ja ζ väärtused $\zeta(q_i, s_j) = z_k$ ja $\nu(q_i, s_j) = q_u$ kujutatakse graafi tippe q_i ja q_u ühendava kaarena, mille kohale kirjutatakse sümbolid s_j, z_k . Näites 4.13 kirjeldatud automaadile vastav graaf on kujutatud joonisel 4.3.

Automaadi $\mathcal{A}$ kirjeldamiseks kasutatakse ka nn **olekute tabelit**, milles on esitatud funktsioonide ν ja ζ väärtused kõigi võimalike argumentide korral:

	ν			ζ		
	s_0	$\dots$	s_n	s_0	$\dots$	s_n
q_0	$\nu(q_0, s_0)$	$\dots$	$\nu(q_0, s_n)$	$\zeta(q_0, s_0)$	$\dots$	$\zeta(q_0, s_n)$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
q_r	$\nu(q_r, s_0)$	$\dots$	$\nu(q_r, s_n)$	$\zeta(q_r, s_0)$	$\dots$	$\zeta(q_r, s_n)$

Näites 4.13 kirjeldatud automaadile vastav olekute tabel on

	ν		ζ	
	0	1	0	1
q_0	q_1	q_0	0	1
q_1	q_2	q_1	1	0
q_2	q_0	q_2	1	0

Näide 4.14. Joonisel 4.4 on kujutatud automaat $\mathcal{A} = [S, Q, Z, \nu, \zeta]$, milles $S = Z = \{0, 1\}$ ja $Q = \{q_0, q_1\}$. Oletame, et automaat alustab tööd olekust q_0 . Sisestades automaati nullide ja ühtede jada, lõpetab automaat töö kas olekus q_0 või q_1 , sõltuvalt sellest, kas sisestavate sümbolite seas on paarisarv või paaritu arv ühtesid.

¹⁸Graafiteooria mõisteid vt järgmisest peatükist.

Autori koduleht

Tiitelleht

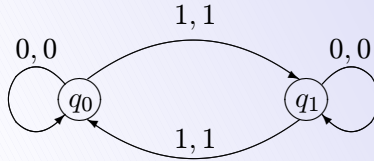


Lk 86 / 247

Tagasi

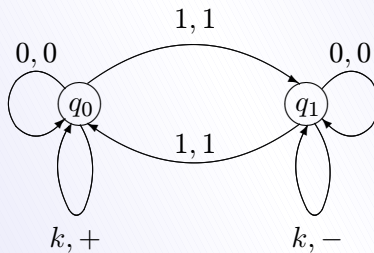
Täisekraan

Lahku failist



Joonis 4.4: Paarsust kontrolliv automaat

Näide 4.15. Lisame näites 4.14 kirjeldatud automaadile juurde sisendsümboli k (märgib küsimust "kas ühtesid on paarisarv?") ning kaks väljundsümbolit $+$ ja $-$ (väljendavad vastust esitatud küsimusele). Automaadi töötamist esitagu joonisel 4.5 kujutatud graaf. Siis olekust q_0 tööd alustades kirjutab automaat väljundlindile sisendlindilt sümbolit k lugedes kas sümboli $+$ või $-$ vastavalt sellele, kas loetavale sümbolile k eelnes paarisarv või paaritu arv ühtesid. Näiteks, kui sisendlindile on kirjutatud sümbolite jada $0110k1110k$, siis väljundlindile kirjutatakse jada $0110+1110-$.



Joonis 4.5: Paarsust kirjeldav automaat

Näide 4.16. Joonisel 4.6 on kujutatud automaat sisend- ja väljund-sümbolite hulkadega $S = Z = \{0, 1\}$. Sisestades sellesse automaati ühtede ja nullide jada, milles on vähemalt kolm elementi, väljastab see automaat viimase sümbolina sümboli 1 parajasti siis, kui viimased kolm sisestatatavat sümbolit on 111.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

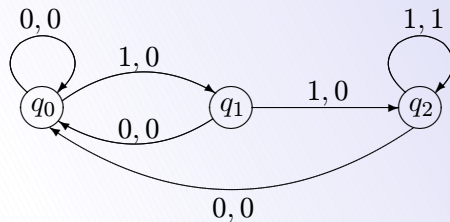
◀ ▶

Lk 87 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



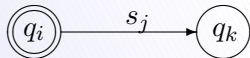
Joonis 4.6

4.5. Väljundsümboliteta automaadid

Vaadeldakse ka automaate, millel puuduvad väljundsümbolid. Üheks selliseks automaadiks on $\mathcal{A} = [S, Q, Q_1, \nu]$, kus

- 1) $S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$ on **sisendsümbolite** hulk,
- 2) $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_r\}$ on **olekute** hulk, kusjuures q_0 on algolek, milles automaat on tööd alustades,
- 3) Q_1 – aktsepteerivate olekute hulk ehk nn jah-olekute hulk ($Q_1 \subset Q$),
- 4) $\nu: Q \times S \longrightarrow Q$ on **üleminekufunktsioon** (järgmisse olekusse).

Ka sellisel juhul saab automaati esitada graafina, kusjuures jah-oleku q ümber tõmmatakse kaks ringjoont: kui $\nu(q_i, s_j) = q_k$, siis see kujutatakse tippe q_i ja q_k kaarena, mille kohale on kirjutatud sisendsümbol s_j (joonis 4.7, seal $q_i \in Q_1$, $q_k \notin Q_1$).

Joonis 4.7: $\nu(q_i, s_j) = q_k$

Näide 4.17. Joonisel 4.8 on kujutatud automaat, mille korral

$$S = \{0, 1\}, \quad Q = \{q_0, q_1, q_2\}, \quad Q_1 = \{q_0, q_1\},$$

$$\nu(q_0, 0) = q_0, \quad \nu(q_0, 1) = q_1, \quad \nu(q_1, 0) = q_0,$$

Autori koduleht

Tiitelleht



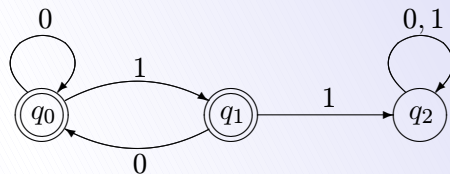
Lk 88 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\nu(q_1, 1) = q_2, \nu(q_2, 0) = q_2, \nu(q_2, 1) = q_2.$$



Joonis 4.8

Olgu antud automaat $\mathcal{A} = [S, Q, Q_1, \nu]$ ja sõna

$$w = a_1 a_2 \dots a_k \in S^*.$$

Siis alustades tööd lähteolekust q_0 ja sisestades üksteise järel sõna w sümbolid $a_1, a_2, \dots, a_k$, tekitab automaat olekute jada $r_0, r_1, \dots, r_k$ ja lõpetab töö olekus r_k :

$$r_0 = q_0 \text{ (lähteolek)} \quad r_1 = \nu(r_0, a_1), \quad r_2 = \nu(r_1, a_2),$$

$$\dots, \quad r_k = \nu(r_{k-1}, a_k).$$

Sellisel juhul tähistatakse

$$r_k = \nu(r_{k-1}, a_k) = \nu(q_0, w).$$

Näide 4.18. Vaatleme joonisel 4.8 kujutatud automaati ning leiame $\nu(q_0, 1101)$:

$$\nu(q_0, 1) = q_1, \quad \nu(q_1, 1) = q_2, \quad \nu(q_2, 0) = q_2,$$

$$\nu(q_2, 1) = q_2, \quad \nu(q_0, 1101) = q_2,$$

st sõna 1101 sisestades lõpetab vaadeldav automaat töö olekus q_2 ja $\nu(q_0, 1101) = q_2$.

Definitsioon 4.19. Olgu antud automaat $\mathcal{A} = [S, Q, Q_1, \nu]$ ja $w \in S^*$. Kui $\nu(q_0, w) \in Q_1$, siis öeldakse, et automaat $\mathcal{A}$ **aktsepteerib** sõna w .

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 89 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Juhul $w = \lambda$ automaat ei tee midagi, st lõppolek langeb kokku algolekuga q_0 ja automaat aktsepteerib sõna w ainult siis, kui $q_0 \in Q_1$.

Tähistagu $L(\mathcal{A})$ kõigi automaadi $\mathcal{A}$ poolt aktsepteeritavate sõnade hulka.

Näide 4.20. Eelmises näites vaadeldud automaat ei aktsepteeri sõna 1101, sest $\nu(q_0, 1101) = q_2 \notin Q_1$. Küll aga on aktsepteeritav sõna 1001:

$$\nu(q_0, 1) = q_1, \nu(q_1, 0) = q_0, \nu(q_0, 0) = q_0,$$

$$\nu(q_0, 1) = q_1, \nu(q_0, 1001) = q_1 \in Q_1.$$

Järgnev teoreem aitab paljudel juhtudel otsustada, kas antud sõna on aktsepteeritav automaadi poolt või mitte.

Teoreem 4.21 (Pumping lemma). *Kui automaat $\mathcal{A} = [S, Q, Q_1, \nu]$, milles on k olekut, aktsepteerib sõna $w \in S^*$, mis on pikem kui k , siis w avaldub kujul $w = xyz$ nii, et iga positiivse astmenäitaja m korral automaat $\mathcal{A}$ aktsepteerib sõna $w_m = xy^mz$.*

Tõestus. Olgu $\mathcal{A}$ automaat k olekuga ning $w = a_1a_2 \dots a_n \in S^*$, $n > k$, kusjuures automaat $\mathcal{A}$ aktsepteerib sõna w , st $w(q_0, w) \in Q_1$. Olgu $q_0, q_1, \dots, q_n$ sõna w poolt tekitatud olekute jada:

$$\nu(q_0, a_1) = q_1, \nu(q_1, a_2) = q_2, \dots, \nu(q_n, a_{n-1}) = q_n \in Q_1.$$

Kuna $n > k$, siis leiduvad indeksid i ja j nii, et $q_i = q_j$, $i < j$. Tähistame

$$x = a_1a_2 \dots a_i, \quad y = a_{i+1} \dots a_j, \quad z = a_{j+1} \dots a_n.$$

Automaadi $\mathcal{A}$ tegutsemist sõnal w illustreerib joonis 4.9. Ilmselt

$$\nu(q_0, xy) = \nu(q_0, xy^m) = q_i, \quad \nu(q_0, xy^mz) = q_n \in Q_1,$$

st sõna xy^mz on aktsepteeritav. $\square$

Autori koduleht

Tiitelleht

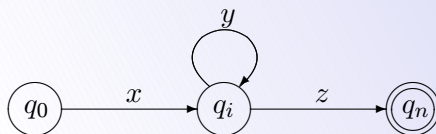


Lk 90 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

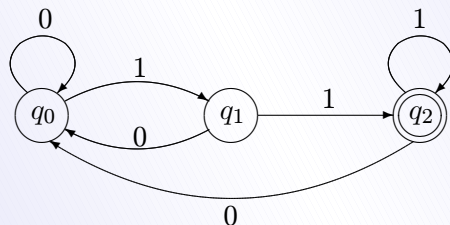


Joonis 4.9

Definitsioon 4.22. Olgu L keel tähestikus S . Kui $\mathcal{A} = [S, Q, Q_1, \nu]$ on automaat, mille korral $L = L(\mathcal{A})$, siis öeldakse, et **keel L on tekitatud automaadi $\mathcal{A}$ poolt**.

Näide 4.23. Joonisel 4.10 kujutatud automaat $\mathcal{A}$ tekitab keele

$$L(\mathcal{A}) = \{u11 \mid u \in \{0, 1\}^*\}.$$



Joonis 4.10

Saab näidata, et kehtib järgmine teoreem.

Teoreem 4.24 (Kleene'i teoreem). Keel L üle tähestiku V on regulaarne parajasti siis, kui leidub selline automaat $\mathcal{A} = [S, Q, Q_1, \nu]$, et automaadi sisendsümbolite hulk $S = V$ ja automaat $\mathcal{A}$ tekitab keele L , st $L = L(\mathcal{A})$.

Näide 4.25. Näitame, et keel $L = \{0^m 1^m \mid m = 1, 2, \dots\}$ tähestikus $\{0, 1\}$ pole regulaarne. Eeldame vastuväiteliselt, et L on regulaarne. Siis leidub Kleene'i teoreemi 4.24 põhjal automaat $\mathcal{A}$, mis

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 91 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

tekitab keele L . Olgu automaadil $\mathcal{A}$ k olekut. vaatleme sõna $w = 0^k 1^k$. Eelduse kohaselt $\mathcal{A}$ aktsepteerib sõna w . Teoreemi 4.21 põhjal avaldub w kujul $w = xyz$, $y \neq \lambda$, ja sõna $w_2 = xy^2z$ aktsepteeritakse samuti automaadi $\mathcal{A}$ poolt, st $w_2 \in L$. Kui y koosneb ainult sümbolitest 0 või sümbolitest 1, siis w_2 koosneb erinevast arvust sümbolitest 0 ja 1 ning seetõttu ei sisaldu keeles L . See on aga vastuolu varem saadud seosega $w_2 \in L$. Kui aga y sisaldab nii sümbolit 0 kui ka sümbolit 1, siis vähemalt üks sümbolitest 0 sõnas w_2 esineb tagapool sümbolist 1. See on aga tähendab, et w_2 ei saa kuuluda keelde L . See on aga jälle vastuolu varem saadud seosega $w_2 \in L$. Seega annavad kõik võimalikud juhud vastuolu. Järelikult ei saa keel L olla regulaarne.

4.6. Grammatika

Keel tavaliselt tekitatakse nn **lähtesümbolist** S ($S \in V$) järk-järgult sõnades sümbolite asendamisel teiste sõnadega. Selleks peab antud olema asendusreeglid ehk **produksioonid** kujul $w_0 \rightarrow w_1$, mis lubab sõnas esineva osasõna w_0 asendada sõnaga w_1 . Alustatakse lähtesõnast, milleks on lähtesümbol S ning järk-järgult saadakse sellest produktsioonidega vaadeldava keele kõik sõnad. Sümbolite hulk V jaotatakse kaheks mittelõikuvaks osaks $T \subset V$ ja $N = V \setminus T$. Hulka T kuuluvaid sümboleid nimetatakse **terminaalsümboliteks** ja hulka N kuuluvaid sümboleid **mitteterminaalseteks sümboliteks**. Sisend-sümbol S on mitteterminaalne sümbol. Terminaalseid sümboleid ei või vaadeldavas keeles asendada teiste sümbolitena. Seega tekitatakse keel nn **grammatikaga**.

Definitsioon 4.26. **Grammatikaks** nimetatakse nelikut $G = (V, T, S, P)$, kus V on tähestik, T on terminaalsümbolite hulk ($T \subset V$), S on lähtesümbol ja P on produktsioonide hulk. Iga produktsioon $w_0 \rightarrow w_1$ hulgast P peab sisaldama vähemalt ühte mitteterminaalset sümbolit sõnas w_0 .

Teeme mõned kokkulepped tähistuste osas. Terminaalsümboleid tähistame väikeste ladina tähtedega $a, b, c, \dots$. Suurte ladina tähtedega $A, B, C, \dots$ tähistame mitteterminaalseid sümboleid. Kreeka tähtedega $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ tähistagem sõnu tähestikus V , st need võivad

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 92 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

sisaldada nii terminaalseid kui ka mitteterminaalseid sümboleid. Tähis

$$\alpha \longrightarrow (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$$

asendab jada

$$\alpha \longrightarrow \beta_1, \alpha \longrightarrow \beta_2, \dots, \alpha \longrightarrow \beta_k.$$

Lugedes S alati lähtesümboliks, piisab grammatika andmiseks ainult piirduda produktsioonide esitamisega (tähestiku moodustavad produktsioonides esinevad sümبولid).

Näide 4.27.

$$G = (V, T, S, P), \quad V = \{a, b, A, B, S\}, \quad T = \{a, b\},$$

$$P = \{S \rightarrow ABa, A \rightarrow BB, B \rightarrow ab, AB \rightarrow b\}.$$

Vaatleme järgnevalt grammatikat $G = (V, T, S, P)$. Kui $w_0 = l z_0 r$, $w_1 = l z_1 r$ ($l, r, z_0, z_1 \in V^*$) ja $z_0 \rightarrow z_1$ on produktsioon hulga P , siis öeldakse, et w_1 on **vahetult tuletatav** sõnast w_0 ja tähistatakse $w_0 \Rightarrow w_1$. Kui

$$w_0 \Rightarrow w_1, w_1 \Rightarrow w_2, \dots, w_{n-1} \Rightarrow w_n, \quad (4.1)$$

siis öeldakse, et w_n **on tuletatav** sõnast w_0 ja tähistatakse $w_0 \stackrel{*}{\Rightarrow} w_1$. Jada (4.1) nimetatakse sõna w_1 **tuletuseks** sõnast w_0 .

Näide 4.28. Vaatleme näites 4.27 antud grammatikat. Siis $ABa \stackrel{*}{\Rightarrow} abababa$, sest kasutades produktsioone

$$B \rightarrow ab, A \rightarrow BB, B \rightarrow ab, B \rightarrow ab,$$

saadakse

$$S \Rightarrow ABa \Rightarrow BBaba \Rightarrow Bababa \Rightarrow abababa.$$

Definitsioon 4.29. Olgu $G = (V, T, S, P)$ vaadeldav grammatika. Siis hulka

$$L(G) = \{w \in T^* \mid S \stackrel{*}{\Rightarrow} w\}$$

nimetatakse **grammatika G poolt tekitatud keeleks** ehk **grammatika G keeleks**.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 93 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 4.30. Olgu

$$V = \{S, A, a, b\}, T = \{a, b\}, P = \{S \rightarrow aA, S \rightarrow b, A \rightarrow aa\}.$$

Siis

$$L(G) = \{b, aaa\}.$$

Näide 4.31. Olgu

$$V = \{S, 0, 1\}, T = \{0, 1\}, P = \{S \rightarrow 11S, S \rightarrow 0\}.$$

Siis

$$L(G) = \{0, 110, 11110, 1111110, \dots\}.$$

Näide 4.32. Produktsioonid

$$S \rightarrow AB, A \rightarrow (Aa, a), B \rightarrow (Bb, b)$$

tekitavad keele

$$L(G) = \{a^m b^n \mid m, n > 0\}.$$

Sageli on vaja konstrueerida grammatika, mis tekitab antud keele. Illustreerime seda järgmise kolme näite varal.

Näide 4.33. Vaatleme hulka

$$\{0^n 1^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Selle hulga tekitab grammatika $G = (V, T, S, P)$, kus

$$V = \{S, 0, 1\}, T = \{0, 1\}, P = \{S \rightarrow 0S1, S \rightarrow \lambda\}.$$

Näide 4.34. Vaatleme hulka

$$\{0^n 1^n \mid n = 1, 2, \dots\}.$$

Selle hulga tekitab grammatika $G = (V, T, S, P)$, kus

$$V = \{S, 0, 1\}, T = \{0, 1\}, P = \{S \rightarrow 0S, S \rightarrow S1, S \rightarrow \lambda\}.$$

Vaadeldava hulga tekitab ka grammatika $G = (V, T, S, P)$, kus

$$V = \{S, A, 0, 1\}, T = \{0, 1\},$$

$$P = \{S \rightarrow 0S, S \rightarrow 1A, S \rightarrow 1, A \rightarrow 1A, A \rightarrow 1, S \rightarrow \lambda\}.$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 94 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 4.35. Vaatleme hulka

$$\{0^n 1^n 2^n \mid n = 0, 1, 2, \dots\}.$$

Selle hulga tekitab grammatika $G = (V, T, S, P)$, kus

$$V = \{S, 0, 1, 2, A, B\}, \quad T = \{0, 1, 2\},$$

$$P = \{S \rightarrow 0SAB, S \rightarrow \lambda, BA \rightarrow AB,$$

$$0A \rightarrow 01, 1A \rightarrow 11, 1B \rightarrow 12, 2B \rightarrow 22\}.$$

Grammatikaid liigitatakse produktsioonidele esitatavate kitsenduste järgi. Esitame siin Noam Chomsky (s. 1928) poolt antud liigituse (vt ka joonist 4.11):

- **tüüpi 0 grammatikad** - pole kitsendusi produktsioonidele;
- **tüüpi 1** ehk **kontekst-sensitiivsed grammatikad** - produktsioonid on kujuga $\alpha \rightarrow \lambda$ või $\alpha \rightarrow \beta$, kus sõna β pikkus $\geq$ sõna α pikkus;
- **tüüpi 2** ehk **kontekstivabad grammatikad** - produktsioonid on kujuga $A \rightarrow \alpha$, kus A on mitteterminaalne sümbol;
- **tüüpi 3** ehk **regulaarsed grammatikad** - produktsioonideks on $S \rightarrow \lambda$ ja produktsioonid kujuga $A \rightarrow a$ või $A \rightarrow aB$, kus A ja B on mitteterminaalsed sümbolid ning a on terminaalne sümbol.

Autori koduleht

Tiitelleht

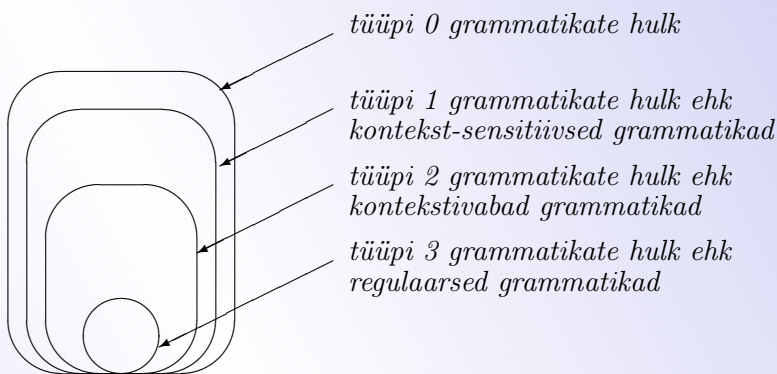


Lk 95 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 4.11

Kontekstivaba grammatika poolt tekitatud keelt nimetatakse **kontekstivabaks keeleks**. Regulaarse grammatika poolt tekitatud keelt nimetatakse **regulaarseks keeleks**.

Näide 4.36. Näites 4.34 antud keel on regulaarne keel.

Näide 4.37. Näitetes 4.33 ja 4.34 antud keeled on kontekstivabad keeled.

Näide 4.38. Näites 4.35 antud keel on kontekst-sensitiivne keel.

Kontekstivaba keele sõnade jaoks saab tuletuse esitada lähtesümbolist S algava puuna.

Näide 4.39. Vaatleme keelt $L = \{a^n b^n \mid n > 0\}$. See keel on tekitatud kontekstivaba grammatikaga, mille produktsioonideks on

$$S \xrightarrow{1} ab, \quad S \xrightarrow{2} aSb$$

(viitamiseks on noole kohale paigutatud produktsiooni number). Siis lähtudes lähtesümbolist S , on tuletatavad sõnad (joonisel allajoonitud) koos tuletusega esitatavad joonisel 4.12 kujutatud lõpmatu puuna.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

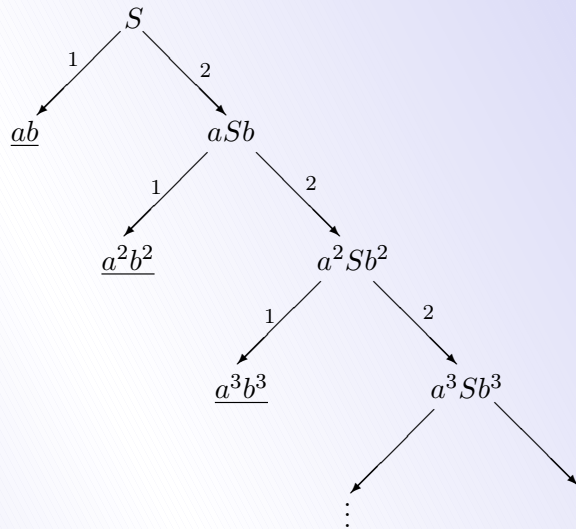
◀ ▶

Lk 96 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 4.12

4.7. Turingi masin

Turingi masin sarnaneb lõpliku automaadiga. Põhilised erinevused on: 1) tema sisend- ja väljundlint langevad kokku, 2) tema sisend- ja väljundsymbolite hulgad langevad kokku ($S = Z$), 3) ta võib igal töötsüklil liikuda nii paremale kui ka vasakule. Kirjeldame järgnevalt Turingi masina koostisosi ja töö põhimõtet.

Turingi masina koostisosad on:

- 1) lint,
- 2) lugev-kirjutav pea,
- 3) linditähestik $S = \{s_0, s_1, \dots, s_n\}$,
- 4) olekute hulk $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_m\}$,
- 5) käskude hulk e. programm.

Lint on mõlemas suunas lõpmatu ja jaotatud ruutudeks. Lindi kõik ruudud, välja arvatud lõplik arv ruute, on algselt tühjad, st nad on täidetud *tühiksümboliga* s_0 . Ainult lõplikus arvus ruutudes esinevad sümboolid tähestikust S . Põhimõtteliselt võiks lint koosneda

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 97 / 247

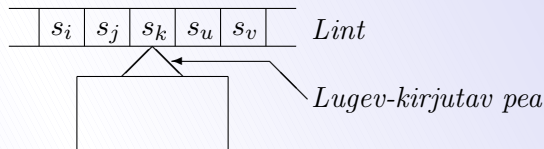
Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

ka lõplikust arvust ruutudest, kuid siis peab lubama vajaduse korral lindi mõlemasse otsa ruutude lisamist.

Lugev-kirjutav pea asub masina igal töösammul lindi mingi ruudu kohal ning ta on võimeline ruudus esinevat sümbolit lugema, aga ka ruutu kirjutama mis tahes sümbolit tähestikust S (joonis 4.13).



Joonis 4.13: Turingi masin

Igal töösammul on masin mingis kindlas *olekus* $q \in Q$. Kui ei ole öeldud vastupidist, siis on Turingi masin tööd alustades alati olekus q_1 .

Käsk on eeskiri, mis "ütleb" lugevale-kirjutavale peale, mida see peab masina vaadeldaval töösammul tegema. Käsk võib anda lugevale-kirjutavale peale ühe järgnevast $(n + 3)$ -st korraldusest:

- liikuda ühe ruudu võrra paremale (R);
- liikuda ühe ruudu võrra vasakule (L);
- kirjutada vaadeldavasse ruutu sümbol s_0 ;
- ...
- kirjutada vaadeldavasse ruutu sümbol s_n .

Käsu üldkuju on

$$q_i s_j K q_r,$$

kus

$$1 \leq i, r \leq m, \quad 0 \leq j \leq n, \quad K \in \{L, R, s_0, s_1, \dots, s_n\}.$$

Programm koosneb käskudest, kusjuures igale paarile $q_i s_j$ võib programmis vastata ülimalt üks käsk $q_i s_j K q_r$.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 98 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Turingi masina töö põhimõte. Masin töötab samm-sammult. Tööd alustades on masin olekus q_1 ja lugev-kirjutav pea on lindi mingi ruudu kohal. Selles ruudus on mingi sümbol $s_i \in S$. Lugev-kirjutav pea loeb ruudust sümboli s_i ja teeb kindlaks, kas programmis esineb käsk, mis algab paariga $q_1 s_i$. Kui selline käsk programmis puudub, siis masin ei tee midagi ja lõpetab töö. Kui aga programmis esineb paariga $q_1 s_i$ algav käsk $q_1 s_i K q_r$, siis see käsk on ainuke ja lugev-kirjutav pea toimib sõltuvalt sümboli K väärtusest järgmiselt:

- kui $K = L$, siis lugev-kirjutav pea liigub ühe ruudu võrra vasakule ja masin läheb üle olekusse q_r ,
- kui $K = R$, siis lugev-kirjutav pea liigub ühe ruudu võrra paremale ja masin läheb üle olekusse q_r ,
- kui $K = s_j$, siis lugev-kirjutav pea kirjutab vaadeldavasse ruutu sümboli s_i asemele sümboli s_j ja masin läheb üle olekusse q_r .

Sellega on masina esimene töösamm teostunud. Kui masin ei lõpetanud tööd, siis on masin olekus q_r ning lugev-kirjutav pea asub ruudu kohal, milles on mingi sümbol $s_t \in S$. Nüüd otsitakse programmist käsku, mis algab paariga $q_r s_t$. Kui sellist käsku pole, siis masin lõpetab töö. Kui aga selline käsk leidub, siis toimitakse analoogiliselt esimese sammuga. Analoogiliselt jätkab masin samm-sammult tööd seni, kuni tekib olukord, mis lõpetab ülaltoodud põhjustel töö.

Näide 4.40. Vaatleme Turingi masinat linditähestikuga $S = \{0, 1\}$ (0 - tühi sümbol), olekute hulgaga $Q = \{q_1, q_2\}$ ja programmiga

$$q_1 0 1 q_1, \quad q_1 1 L q_2, \quad q_2 0 1 q_2, \quad q_2 1 L q_3, \quad q_3 0 1 q_3.$$

Olgu töö algul lint tühi (kõik ruudud on täidetud sümboliga 0) ja asugu lugev-kirjutav pea mis tahes ruudu kohal. Esimesel sammul¹⁹ tuleb täitmisele käsk, mis algab paariga $q_1 0$, st käsk $q_1 0 1 q_1$. Selle käsu kohaselt kirjutab lugev-kirjutav pea ruutu sümboli 1 ja masin läheb üle olekusse q_1 . Nüüd tuleb täitmisele käsk, mis algab paariga $q_1 1$, st käsk $q_1 1 L q_2$. Selle käsu kohaselt liigub lugev-kirjutav pea ühe ruudu võrra vasakule ja masin läheb üle olekusse q_2 . Kuna lugev-kirjutav pea on tühja sümbolit 0 sisaldava ruudu kohal ja masin on olekus q_2 , siis tuleb järgneval sammul täitmisele käsk $q_2 0 1 q_2$. Selle käsuga kirjutab

¹⁹Nagu eeldatud, on tööd alustades masin olekus q_1 .

Autori koduleht

Tiitelleht



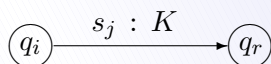
Lk 99 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

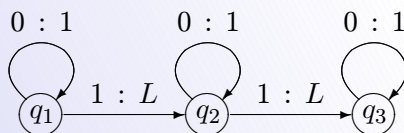
lugev-kirjutav pea tema kohal olevasse ruutu sümboli 1 ja masin läheb üle olekusse q_2 . Edasi tuleb täita juba käsk, mis algab paariga q_21 , st käsk q_21Lq_3 . Selle käsuga nihutatakse lugev-kirjutav pea ühe ruudu võrra vasakule ja masin läheb üle olekusse q_3 . Nüüd tuleb täita käsk, mis algab paariga q_30 , st käsk q_301q_3 . Selle kohaselt kirjutab lugev-kirjutav pea tema kohal olevasse ruutu sümboli 1 ja masin läheb üle olekusse q_3 . Kuna programmis puudub käsk, mis algab paariga q_31 , siis masin lõpetab oma töö. Kokkuvõttes on vaadeldav Turingi masin tühjale lindile kirjutanud sõna 111 (ülejäänud ruudud on tühjad).



Joonis 4.14: Käsule $q_i s_j K q_r$ vastav graaf

Ka Turingi masinaid saab kujutada graafina. Graafi tippudeks on jälle olekud ja käsku $q_i s_j K q_r$ kujutatakse tippe q_i ja q_r ühendava kaarena, mille kohale on kirjutatud $s_j : K$ (joonis 4.14). Kujutades nii programmi kõik käsud, saadaksegi Turingi masina graaf. Joonisel 4.15 on kujutatud näites 4.40 kirjeldatud Turingi masina graaf.

Näide 4.41. Olgu linditähestik $S = \{0, 1\}$ (0 - tühi sümbol), olekute hulk $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_{12}\}$ ja programm on antud joonisel 4.16 kujutatud graafiga (olek q_i on joonisel samastatud tema indeksiga i). Eeldame, et lindile on algselt kirjutatud lõplik ühtede jada $11\dots1$ (ülejäänud ruutudes on tühi sümbol 0) ja lugev-kirjutav pea asub vasakpoolseimat ühte sisaldava ruudu kohal. Siis vaadeldav Turingi masin lisab antud ühtede jadale sama pika ühtede jada, st kahekordistab ühtede arvu. Tööd lõpetades asub lugev-kirjutav pea lindi vasakpoolseimat ühte sisaldava ruudu kohal.



Joonis 4.15: Näite 4.40 Turingi masina graaf

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

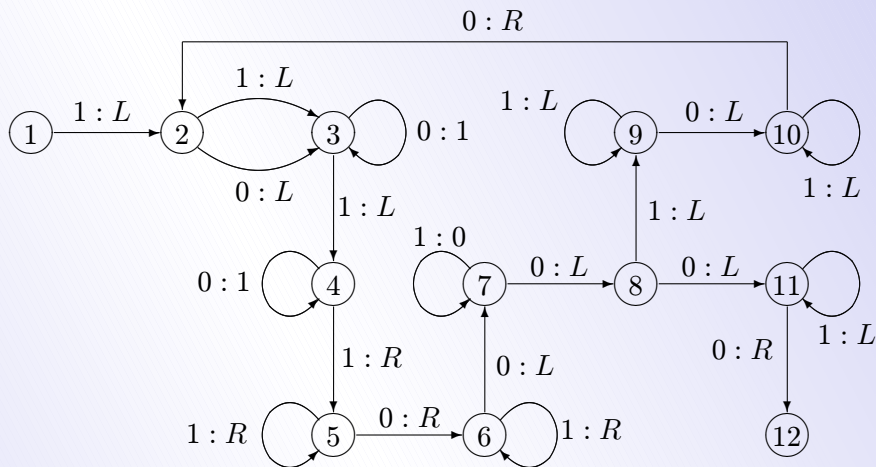
◀ ▶

Lk 100 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 4.16: Ühtede arvu kahekordistamine

Turingi masina programmi võib kujutada ka tabelina. Näites 4.40 kirjeldatud Turingi masina programm tabeli kujul on

	0	1
q_1	$1q_1$	Lq_2
q_2	$1q_2$	Lq_3
q_3	$1q_3$	

Selles tabelis olekuga q_i algava rea ja sümboliga j algava veeru ristumiskohas asuvale paarile Kq_r vastab programmi käsk $q_i j Kq_r$.

4.8. Arvutatavad funktsioonid

Tähistame sümboliga $\mathbb{P}$ kõigi positiivsete täisarvude hulka. Järgnevalt huvitavad meid funktsioonid $f(n)$, kus nii funktsiooni argumentid kui ka väärtused on positiivsed täisarvud. Funktsiooni määramispiirkonnaks ei pea olema kogu hulk $\mathbb{P}$. Seega vaatleme kujutusi $f : X \rightarrow \mathbb{P}$, kus $X \subset \mathbb{P}$. Kirjeldatud funktsioone nimetatakse (ühe muutuja) **täisarvulisteks funktsioonideks**. Meie sooviks on arvutada funktsiooni

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 101 / 247

Tagasi

Täisekraan

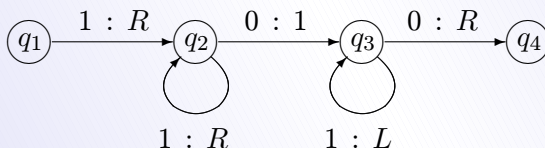
Lahku failist

$f(n)$ väärtusi sobiva Turingi masina abil. Linditähestikuks valime hulga $S = \{0, 1\}$, kus 0 tähistab tühja sümbolit ja arve kujutame lindil ühendsüsteemis, st positiivne täisarv n on kujutatud lindil n järjestikuse ühega täidetud ruuduga (ülejäänud ruudud on täidetud tühja sümboliga 0).

Turingi masina **konfiguratsiooni** all mõistetakse paari, mis koosneb lindile kirjutatud sümbolitest ja lugeva-kirjutava pea asukohast. On selge, et konfiguratsioon masina töö algmomendil määrab üheselt konfiguratsiooni masina töö lõpus.

Definitsioon 4.42. Öeldakse, et Turingi masin on **standardkonfiguratsioonis** n , kui lindil on n järjestikust ühte, ülejäänud lindi ruudud on täidetud tühja sümboliga 0 ja lugev-kirjutav pea asub vasakpoolseima ühe kohal.

Definitsioon 4.43. Öeldakse, et Turingi masin **arvutab funktsiooni** $f(n)$, kui ta, alustades tööd vähima numbriga olekus standardkonfiguratsioonis n , lõpetab tööd standardkonfiguratsioonis $f(n)$. Kui Turingi masin ei lõpeta tööd või lõpetab tööd mittestandardises konfiguratsioonis, siis $f(n)$ on mittedefiniitud (tähis: $f(n) = \perp$).



Joonis 4.17: Funktsiooni $f(n) = n + 1$ arvutav Turingi masin

Näide 4.44. Funktsioon $f(n) = n + 1$ on arvutatav joonisel 4.17 kujutatud Turingi masinaga.

Näide 4.45. Funktsioon $f(n) = 2n$ on arvutatav näites 4.41 kirjeldatud Turingi masinaga.

Laiendame Turingi masinatega arvutatavate funktsioonide mõiste mitme muutuja täisarvulistele funktsioonidele.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 102 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Definitsioon 4.46. Öeldakse, et Turingi masin **arvutab funktsiooni** $f(n_1, \dots, n_m)$ ($n_1, \dots, n_m \in \mathbb{P}$), kui ta, alustades tööd vähima numbriga olekus lindi standardkonfiguratsioonis $n_1 0 n_2 0 \dots 0 n_m$ (siin n_i tähistab lindi järjestikuste ühtede arvu, lindi ülejäänud ruudud on tühjad), lõpetab töö standardkonfiguratsioonis $f(n_1, \dots, n_m)$. Kui masin ei lõpeta tööd või peatub mittestandardises konfiguratsioonis, siis $f(n_1, \dots, n_m) = \perp$.

Definitsioon 4.47. Funktsiooni $f(n_1, \dots, n_m)$ nimetatakse **Turingi mõttes arvutatavaks**, kui leidub seda arvutav Turingi masin.

Olgu märgitud, et iga Turingi masin $\mathcal{M}$ (fikseeritud linditähestikuga $S = \{0, 1\}$) arvutab mingit m muutuja täisarvulist funktsiooni $f(n_1, \dots, n_m)$. Selleks tuleb teha kindlaks, kuidas töötab masin $\mathcal{M}$, alustades tööd standardkonfiguratsioonist $n_1 0 n_2 0 \dots 0 n_m$. Kui masin lõpetab töö standardkonfiguratsioonis k , siis $f(n_1, \dots, n_m) = k$. Vastasel juhul $f(n_1, \dots, n_m) = \perp$. Selline funktsioon f on masinaga $\mathcal{M}$ üheselt määratud.

Näide 4.48. Arve $n, m \in \mathbb{P}$ liitev funktsioon $f(n, m) = n + m$ on arvutatav Turingi mõttes. Teda arvutab näiteks Turingi masin viie olekuga $q_1, \dots, q_5$ ja programmiga

$$q_1 1 R q_2, \quad q_2 1 R q_2, \quad q_2 0 1 q_3, \quad q_3 1 L q_3, \\ q_3 0 R q_4, \quad q_4 1 0 q_4, \quad q_4 0 R q_5.$$

Aga teda arvutab ka Turingi masin nelja olekuga $q_1, \dots, q_4$ ja programmiga

$$q_1 1 0 q_1, \quad q_1 0 R q_2, \quad q_2 1 R q_2, \\ q_2 0 1 q_3, \quad q_3 1 L q_3, \quad q_3 0 R q_4.$$

Näide 4.49. Arve $n, m \in \mathbb{P}$ korrutav funktsioon $f(n, m) = nm$ on arvutatav Turingi mõttes. Korrutatavaid Turingi masinaid on konstrueeritud mitmeid. Esitame neist siin ühe. Sellel masinal on 18 olekut

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 103 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$q_1, \dots, q_{18}$ ja ta on antud 31-st käsust koosneva programmiga

$q_1 10q_1, \quad q_1 0Rq_2, \quad q_2 1Rq_3, \quad q_3 1Rq_3, \quad q_3 0Rq_4,$
 $q_4 0Rq_4, \quad q_4 10q_5, \quad q_5 0Rq_6, \quad q_6 01q_{12}, \quad q_{12} 1Lq_{13},$
 $q_{13} 0Lq_{13}, \quad q_{13} 1Lq_{14}, \quad q_{14} 1Lq_{14}, \quad q_{14} 0Rq_1, \quad q_6 1Rq_7,$
 $q_7 1Rq_7, \quad q_7 0Rq_8, \quad q_8 01q_{10}, \quad q_8 1Rq_9, \quad q_9 1Rq_9,$
 $q_9 01q_{10}, \quad q_{10} 1Lq_{10}, \quad q_{10} 0Lq_{11}, \quad q_{11} 1Lq_{11}, \quad q_{11} 0Rq_4,$
 $q_2 0Rq_{15}, \quad q_{15} 01q_{16}, \quad q_{16} 1Rq_{15}, \quad q_{15} 1Lq_{17}, \quad q_{17} 1Lq_{17},$
 $q_{17} 0Rq_{18}.$

Käesoleva alajaotuse järgneva osa eesmärgiks on kirjeldada klassikaline näide ühe muutuja täisarvulisest funktsioonist, mis pole arvutatav Turingi mõttes.

Olgu $\mathcal{M}$ Turingi masin ja f temaga arvutatav ühe muutuja funktsioon. Siis saab defineerida funktsiooni f väärtuse $f(0)$ ka arvu 0 jaoks. Kui masin $\mathcal{M}$ alustab tööd tühja lindiga ja lõpetab töö standardkonfiguratsioonis k , siis $f(0) = k$. Vastasel juhul $f(0) = 0$.

Definitsioon 4.50. Turingi masina $\mathcal{M}$ **produktiivsuseks** nimetatakse tema poolt arvutatava funktsiooni f väärtust $f(0)$.

Näide 4.51. Näites 4.40 kirjeldatud Turingi masinaga $\mathcal{M}$ arvutatav funktsioon on $f(n) = n + 2$ ja selle masina produktiivsus on 3. Joonistel 4.16 ja 4.17 kujutatud Turingi masinate produktiivsused võrduvad nulliga.

Defineerime ühe muutuja täisarvulise funktsiooni p järgnevalt: $p(n)$ võrdub produktiivseima n olekuga Turingi masina produktiivsusega ($n \in \mathbb{P}$). Funktsioon p võimaldab sõnastada nn **virga kopra probleemi**:

- Konstrueerida Turingi masin (tähestikuga $S = \{0, 1\}$), mis arvutab funktsiooni $p(n)$.

Näitame, et virga kopra probleem on mittelahenduv.²⁰

Edaspidi kujutatakse olekust q_1 tööd alustavat ja olekus q_n tööd lõpetavat Turingi masinat lühidalt joonise 4.18 abil.

²⁰Virga kopra probleemi sõnastuse ja selle mittelahenduvuse esitas Rado Tibor, *Bell System Technical Journal*, May 1962, lk. 877-884.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 104 / 247

Tagasi

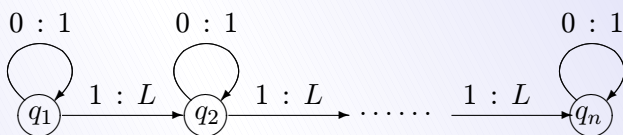
Täisekraan

Lahku failist



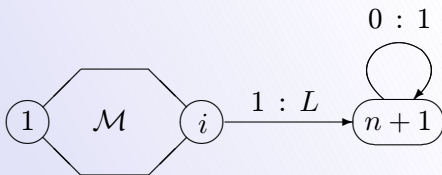
Joonis 4.18: Turingi masina lühendatud kujutis

Kõigepealt tõestame funktsiooni $p(n)$ kaks omadust.

Joonis 4.19: n ühte tegev masin

Omadus 4.52. $p(n + 1) > p(n)$.

Tõestus. Olgu $\mathcal{M}$ mis tahes n olekuga $q_1, \dots, q_n$ Turingi masin, mille produktiivsus on $p(n)$. Olgu selle masina olek tühja lindiga tööd alustades töö lõpuks q_i . Siis masina $\mathcal{M}$ programmis puudub käsk kujul $q_i 1 *$, sest vastasel korral masin ei lõpetaks veel tööd. Lisame masinale veel ühe oleku $q = q_{n+1}$ ja käsud $q_i 1 L q$ ning $q 0 1 q$. Siis saame joonisel 4.20 kujutatud $n + 1$ olekuga Turingi masina, mis tühja lindiga tööd alustades lõpetab töö standardkonfiguratsioonis $p(n) + 1$, st selle masina produktiivsus on $p(n) + 1$. Järelikult $p(n + 1) > p(n)$. $\square$

Joonis 4.20: Turingi masin produktiivsusega $p(n) + 1$

Omadus 4.53. $p(n + 11) \geq 2n$.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 105 / 247

Tagasi

Täisekraan

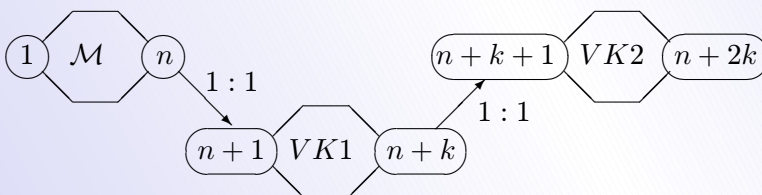
Lahku failist

Tõestus. Joonisel 4.19 on kujutatud n olekuga $q_1, \dots, q_n$ masin $\mathcal{M}_1$, mis tühjale lindile kirjutab n ühte. Tähistagu $\mathcal{M}_2$ näites 4.41 ühtede arvu kahekordistamiseks konstrueeritud Turingi masinat, ainult olekute numeratsiooni alustame numbrist n . Seega masina $\mathcal{M}_2$ olekud on $q_n, q_{n+1}, \dots, q_{n+11}$. Märgime, et masinatel $\mathcal{M}_1$ ja $\mathcal{M}_2$ on üks ühine olek q_n . Ühendame omavahel need kaks Turingi masinat. Saame $n + 11$ olekuga Turingi masina, mille produktiivsus on $2n$. Järelikult $p(n + 11) \geq 2n$. $\square$

Teoreem 4.54. *Virga kopra probleem pole lahenduv, st ei leidu funktsiooni $p(n)$ arvutavat Turingi masinat.*

Tõestus. Vastuväiteliselt eeldame, et virga kopra probleem on lahenduv. Siis leidub Turingi masin VK , mis arvutab funktsiooni $p(n)$. Olgu masina VK olekute arv k . Tähistagu $\mathcal{M}$ masinat, mis kirjutab tühjale lindile n ühte (vt joonist 4.19). Veel vaatleme Turingi masinaid $VK1$ ja $VK2$, mis saadakse masinast VK selle olekuid ümber nummerdades: masina $VK1$ olekud on $q_{n+1}, \dots, q_{n+k}$ ja masina $VK2$ olekud on $q_{n+k+1}, \dots, q_{n+2k}$. Ühendame masinad $\mathcal{M}$, $VK1$ ja $VK2$ joonisel 4.21 kujutatud Turingi masinaks. Saadud masin on $n + 2k$ olekuga ja produktiivsusega $p(p(n))$. Järelikult

$$p(n + 2k) \geq p(p(n)).$$



Joonis 4.21: Turingi masin produktiivsusega $p(p(n))$

Kuna omaduse 4.52 põhjal on funktsioon $p(n)$ kasvav, siis viimasest võrratusest järeldub iga $n \in \mathbb{P}$ korral kehtiv võrratus

$$n + 2k \geq p(n).$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 106 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Asendades siin arvu n arvuga $n + 11$, saame omaduse 4.53 põhjal

$$n + 11 + 2k \geq p(n + 11) \geq 2n \quad \text{ehk} \quad 11 + 2k \geq n,$$

mis kehtib iga $n \in \mathbb{P}$ korral. Asendades siin arvu n arvuga $12 + 2k$, saame võrratuse $0 \geq 1$, mis on vastuolu. Saadud vastuolu näitab, et ei leidu funktsiooni $p(n)$ arvutavat Turingi masinat e. virga kopra probleem pole lahenduv. $\square$

4.9. Rekursiivsed funktsioonid

Tähistagu $\mathbb{N}$ kõigi naturaalarvude hulka. Käesolevas käsitluses loeme $0 \in \mathbb{N}$. Vaatluse alla tulevad n muutuja funktsioonid $f(x_1, \dots, x_n)$, kus funktsiooni f argumendid $x_1, \dots, x_n$ ja väärtus $f(x_1, \dots, x_n)$ on naturaalarvud. Seejuures ei pea funktsioon olema määratud kogu hulgal $\mathbb{N}^n$. Seega vaatleme ainult funktsioone f , kus

$$f : M \longrightarrow \mathbb{N}, \quad M \subset \mathbb{N}^n$$

(M on funktsiooni f määramispiirkond). Edaspidi käesolevas alajao- tuses tähendab sõna "funktsioon" ainult funktsiooni äsjakirjeldatud mõttes. Kui funktsiooni f määramispiirkond M langeb kokku hulgaga $\mathbb{N}^n$, siis öeldakse, et funktsioon f on **määratud kõikjal**. Kui aga pole teada, kas funktsioon on määratud kõikjal või mitte, siis öeldakse, et funktsioon f on **osaliselt määratud**.

Järgnevalt tuletatakse teatud reeglite abil antud funktsioonidest uusi funktsioone. Neid reegleid nimetame **operaatoriteks**. Kirjel- dame kolme operaatorit.

I Superpositsioonioperaator.

Olgu φ m -kohaline funktsioon ja $f_1, \dots, f_m$ n -kohalised funkt- sioonid. Siis saab defineerida n -kohalise funktsiooni f reeglina

$$f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)).$$

Sel korral öeldakse, et funktsioon f on saadud funktsioonidest $\varphi, f_1, \dots, f_m$ superpositsioonioperaatori abil. Nagu näha, tähendab super- positsioonioperaator liitfunktsiooni moodustamist. Tähistagem super- positsioonioperaatorit sümboliga S ja selle abil funktsioonidest φ ning

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 107 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

$f_1, \dots, f_m$ saadud funktsiooni f kujul

$$f = S(\varphi, f_1, \dots, f_m).$$

II Lihtrekursioonioperaator.

Olgu φ n -kohaline funktsioon ja ψ $(n + 2)$ -kohaline funktsioon. Nende abil saab defineerida $(n + 1)$ -kohalise funktsiooni f reeglitega

$$\begin{cases} f(x_1, \dots, x_n, 0) = \varphi(x_1, \dots, x_n), \\ f(x_1, \dots, x_n, y + 1) = \psi(x_1, \dots, x_n, y, f(x_1, \dots, x_n, y)). \end{cases}$$

Sel korral öeldakse, et funktsioon f on saadud funktsioonidest φ ja ψ lihtrekursioonioperaatoriga. Kui $n = 0$, siis φ on konstantne funktsioon ja

$$\begin{cases} f(0) = a, \\ f(y + 1) = \psi(y, f(y)), \end{cases}$$

kus a on fikseeritud naturaalarv. Tähistagem lihtrekursioonioperaatorit sümboliga P ja selle abil funktsioonidest φ ning ψ saadud funktsiooni f kujul

$$f = P(\varphi, \psi)$$

(juhul $n = 0$ kujul $f = P(a, \psi)$, kus $a = f(0)$).

III Minimiseerimisoperaator.

Olgu g $(n + 1)$ -kohaline funktsioon. Defineerime n -kohalise funktsiooni f reeglga: $f(x_1, \dots, x_n)$ on vähim naturaalarv y , mille korral $g(x_1, \dots, x_n, y) = 0$:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \min \{ y \mid g(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \}.$$

Sel korral öeldakse, et funktsioon f on saadud funktsioonist g minimiseerimisoperaatoriga. Tähistagem minimiseerimisoperaatorit sümboliga M ja selle abil funktsioonist g saadud funktsiooni f kujul

$$f = M(g).$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 108 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Lähtefunktsioone, milledest ülalkirjeldatud kolme operaatoriga moodustatakse uusi funktsioone, nimetatakse **algfunktsioonideks**. Algfunktsioonideks loetakse järgmisi funktsioone:

$$\begin{aligned}o(x) &= 0, \\s(x) &= x + 1, \\I_m^n(x_1, \dots, x_n) &= x_m\end{aligned}$$

$(1 \leq m \leq n)$.

Definitsioon 4.55. Algfunktsioone ja funktsioone, mis on saadud algfunktsioonidest o , s ja I_m^n lõplik arv kordi superpositsioonioperaatorit ja lihtrekursioonioperaatorit rakendades, nimetatakse **lihtrekursiivseteks funktsioonideks**.²¹

Toodud definitsioonist järeldub, et lihtrekursiivne funktsioon on määratud kõikjal. Lihtrekursiivsetest funktsioonidest lõplik arv kordi superpositsioonioperaatorit ja lihtrekursioonioperaatorit rakendades saadud funktsioonid on lihtrekursiivsed.

Näide 4.56. Funktsioonid o , s ja I_m^n on lihtrekursiivsed juba definitsiooni kohaselt. Lihtrekursiivne on ka funktsioon

$$o_n(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

sest ta saadakse funktsioonidest o ja I_1^n superpositsioonioperaatoriga:

$$o_n(x_1, \dots, x_n) = o(I_1^n(x_1, \dots, x_n)), \quad o_n = S(o, I_1^n).$$

Näide 4.57. Funktsioon $f(x) = x + 3$ on lihtrekursiivne, sest ta saadakse funktsioonist s kolm korda superpositsioonioperaatorit rakendades:

$$f(x) = x + 3 = s(x + 2) = s(s(x + 1)) = s(s(s(x))),$$

$$f = S(s, S(s, s)).$$

Analoogiliselt on lihtrekursiivne funktsioon $f(x) = x + n$, kus n on fikseeritud naturaalarv.

²¹Lihtrekursioonioperaatorit P kasutades on lubatud kasutada eelpool mainitud juhtu $P(a, \psi)$, kus $a \in \mathbb{N}$.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#) [▶▶](#)
[◀](#) [▶](#)

Lk 109 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Näide 4.58. Funktsioon $f(x, y) = x + y$ on lihtrekursiivne, sest ta saadakse lihtrekursioonioperaatoriga lihtrekursiivsetest funktsioonidest

$$\varphi(x) = I_1^1(x) = x \quad \text{ja} \quad \psi(x, y, z) = s(z) = s(I_3^3(x, y, z)).$$

Tõepoolest,

$$f(x, 0) = x = \varphi(x),$$

$$f(x, y + 1) = x + y + 1 = s(x + y) = s(f(x, y)) =$$

$$= \psi(x, y, f(x, y)),$$

st

$$f = P(I_1^1, \psi) = P(I_1^1, S(s, I_3^3)).$$

Näide 4.59. Funktsioon $f(x, y) = xy$ on lihtrekursiivne, sest ta saadakse lihtrekursiivsetest funktsioonidest $\varphi = o$ ja $\psi(x, y, z) = x + z$ lihtrekursioonioperaatoriga:

$$\begin{cases} f(x, 0) = 0 = \varphi(x), \\ f(x, y + 1) = x(y + 1) = xy + x = \psi(x, y, f(x, y)), \end{cases}$$

$$f = P(\varphi, \psi).$$

Funktsiooni ψ lihtrekursiivsus järeldub järgnevatest seostest:

$$\psi(x, y, z) = x + z = I_1^3(x, y, z) + I_3^3(x, y, z),$$

$$\psi = S(\sigma, I_1^3, I_3^3),$$

kus $\sigma(x, y) = x + y$. Näite 4.58 põhjal $\sigma = P(I_1^1, S(s, I_3^3))$. Seega

$$\psi = S(P(I_1^1, S(s, I_3^3)), I_1^3, I_3^3)$$

ja

$$f = P(\varphi, \psi) = P(o, S(P(I_1^1, S(s, I_3^3)), I_1^3, I_3^3)).$$

Näidetest 4.58 ja 4.59 järeldub, et lihtrekursiivsete funktsioonide summa ja korrutis on samuti lihtrekursiivsed funktsioonid.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 110 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Definitsioon 4.60. Funktsioone, mis saadakse algfunktsioonidest o , s ja I_m^n lõplik arv kordi superpositsioonioperaatorit, lihtrekursioonioperaatorit ja minimiseerimisoperaatorit kasutades, nimetatakse **osaliselt rekursiivseteks funktsioonideks**.

Näide 4.61. Näitame, et funktsioon $f(x, y) = x - y$ on osaliselt rekursiivne. Vaadeldav funktsioon f on määratud vaid juhul, kui $x \geq y$. Defineerime kõikjal määratud funktsiooni

$$g(x, y) = x \ominus y = \begin{cases} x - y, & \text{kui } x \geq y, \\ 0, & \text{kui } x < y. \end{cases}$$

Funktsioonid $h(x) = x \ominus 1$ ja $g(x, y)$ on lihtrekursiivsed:

$$\begin{cases} h(0) = 0, \\ h(y + 1) = y = I_1^2(y, h(y)), \end{cases}$$

$$h = P(0, I_1^2),$$

$$g(x, 0) = x = I_1^1(x), \quad g(x, y + 1) = x \ominus (y + 1) = (x \ominus y) \ominus 1 =$$

$$= h(g(x, y)) = h(I_3^3(x, y, g(x, y))),$$

$$g = P(I_1^1, S(h, I_3^3)) = P(I_1^1, S(P(0, I_1^2), I_3^3)).$$

Seetõttu on lihtrekursiivne ka funktsioon

$$|x - y| = (x \ominus y) + (y \ominus x)$$

kui lihtrekursiivsete funktsioonide summa. Järelikult on lihtrekursiivne ka funktsioon

$$k(x, y, z) = |x - (y + z)| = |x - y - z|.$$

Vähim arv z , mille korral $k(x, y, z) = 0$, võrdub arvuga $x - y = f(x, y)$. Seega on funktsioon $f(x, y)$ saadav lihtrekursiivsest funktsioonist $k(x, y, z)$ minimiseerimisoperaatoriga. Järelikult on funktsioon $f(x, y)$ osaliselt rekursiivne.

Definitsioon 4.62. Kõikjal määratud osaliselt rekursiivset funktsiooni nimetatakse **täisrekursiivseks funktsiooniks**.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 111 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Leidub täisrekursiivseid funktsioone, mis pole lihtrekursiivsed. Üheks selliseks funktsiooniks on **Ackermanni funktsioon** $f(x, y, z)$, mis defineeritakse seostega

$$f(x, 0, 0) = x, \quad f(x, y + 1, 0) = f(x, y, 0) + 1,$$

$$f(x, 0, 1) = 0, \quad f(x, 0, z + 2) = 1,$$

$$f(x, y + 1, z + 1) = f(x, f(x, y, z + 1), z)$$

Saab näidata, et Turingi mõttes arvutatavate funktsioonide klass ja osaliselt rekursiivsete funktsioonide klass langevad kokku. Matemaatikud tunnustavad ja kasutavad järgmist väidet.

Churchi tees *Iga arvutatav funktsioon on osaliselt rekursiivne ja vastupidi.*

Meenutame, et funktsiooni nimetatakse **arvutatavaks**, kui leidub algoritm selle funktsiooni väärtuste leidmiseks. Seega väidab Churchi tees, et iga algoritm on realiseeritav Turingi masinana. Churchi teesi tõestada ei saa. Selle kasutamise õigustuseks on fakt, et seni pole õnnestunud konstrueerida Churchi teesi kummutavat näidet.

4.10. Ülesandeid

4.1 Otsustada, kas sõna 1110001 kuulub järgmistesse keeltesse üle tähestiku $V = \{0, 1\}$:

$$1) \{0, 1\}^*, \quad 2) \{1\}^*\{0\}^*\{1\}^*,$$

$$3) \{11\}\{1\}^*\{01\}, \quad 4) \{111\}^*\{0\}^*\{1, 0\}.$$

Ülesannetes 4.2–4.5 leida Kleene'i sulund tähestikus $V = \{0, 1\}$ antud keele L jaoks.

4.2 $L = \{10\}.$

4.3 $L = \{11\}.$

4.4 $L = \{1, 01\}.$

4.5 $L = \{1, 101\}.$

4.6 Milleks teisendab joonisel 4.22 kujutatud lõplik automaat sisendsümbolite jada 101011 (start olekust q_0)?

Autori koduleht

Tiitelleht

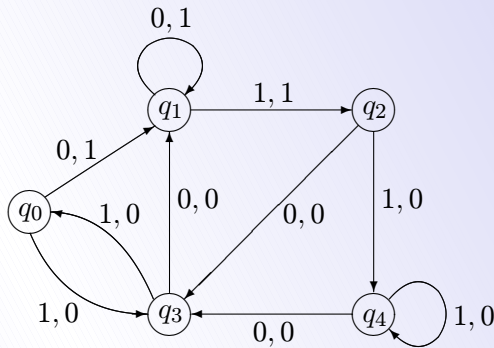


Lk 112 / 247

Tagasi

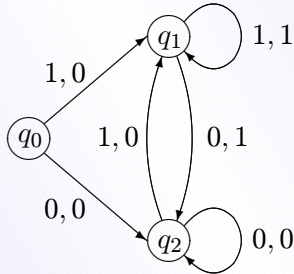
Täisekraan

Lahku failist



Joonis 4.22

4.7. Veenduda, et joonisel 4.23 kujutatud lõplik automaat teisendab sisendsümbolite jada $x_1x_2 \dots x_k$ jadaks $0x_1x_2 \dots x_{k-1}$ (start olekust q_0)?



Joonis 4.23

4.8 Kirjeldada automaat $\mathcal{A} = [S, Q, Z, \nu, \zeta]$, kus $S = Z = \{0, 1\}$ ja mis olekust q_0 tööd alustades teisendab sümbolite jada $i_1i_2 \dots i_n$ jadaks $00i_1i_2 \dots i_{n-2}$ ($n \geq 2$).

4.9 Moore'i masin on masin, kus väljundsümbol sõltub ainult olekust, mitte sisendsümbolist; graafina kujutamisel märgitakse väljundsümbol oleku juurde, sisendsümbol aga graafi kaarel. Taha graaf Moore'i masinale, mille andmed on järgmised:

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 113 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Olek	ν		ζ
	0	1	
q_0	q_0	q_2	0
q_1	q_3	q_0	1
q_2	q_2	q_1	1
q_3	q_2	q_0	1

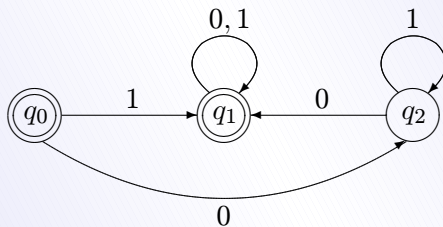
Leida väljundsümbolite jada (start olekust q_0), kui sisendsümbolite jada on a) 0101, b) 111111.

4.10 Otsustada, kas joonisel 4.9 kujutatud automaat aktsepteerib antud sõna:

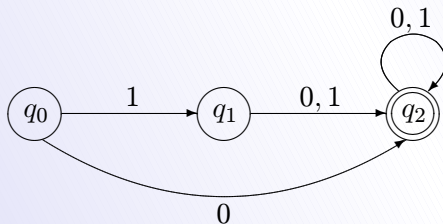
1) 101, 2) 1011, 3) 11101.

Ülesannetes 4.11–4.14 leida antud joonisel kujutatud automaadi poolt tekitatud keel.

4.11



4.12



Autori koduleht

Tiitelleht



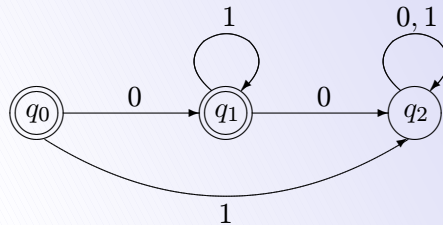
Lk 114 / 247

Tagasi

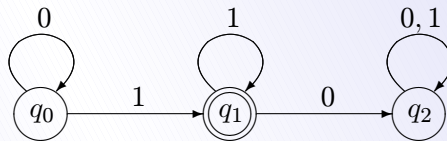
Täisekraan

Lahku failist

4.13

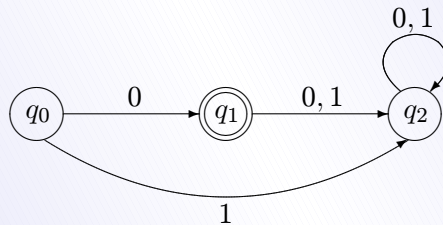


4.14

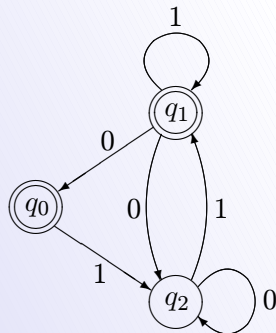


Ülesannetes 4.15–4.17 leida antud automaadi poolt tekitatud keele jaoks grammatika, mis tekitab selle keele.

4.15



4.16



Autori koduleht

Tiitelleht



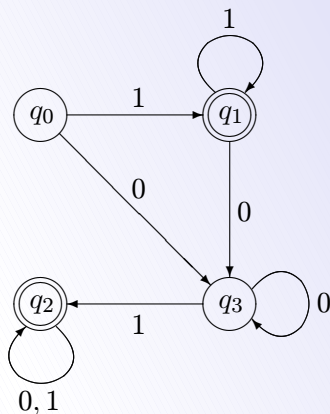
Lk 115 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.17



4.18 Konstrueerida Turingi masin, mis lindile järjestikku kirjutatud lõpliku ühtede jada $111 \dots 11$ lõppu (ülejäanud ruudud on tühjad) kirjutab sümboli $+$ või sümboli $-$ sõltuvalt sellest, kas ühtesid on paaris- või paaritu arv. Eeldada seejuures, et tööd alustades on lugev-kirjutav pea vasakpoolseimat ühte sisaldava ruudu kohal.

4.19 Konstrueerida Turingi masin, mis vastab eelmise ülesande nõuetele, kuid tööd lõpetades asub lugev-kirjutav pea jälle vasakpoolseimat ühte sisaldava ruudu kohal.

4.20 Tähistagu $f(n)$ jääki, mis tekib positiivse naturaalarvu n jagamisel kolmega. Koostada Turingi masin funktsiooni $f(n)$ väärtuste arvutamiseks (kui arv n jagub arvuga 3, siis masina töö lõppedes on lint tühi ja lugev-kirjutav pea on mis tahes ruudu kohal).

4.21 Tähistagu $f(n)$ naturaalarvu $n \geq 3$ jagamisel kolmega tekkivat täisosat. Koostada funktsiooni $f(n)$ arvutav Turingi masin.

4.22 Konstrueerida Turingi masin, mis arvutab funktsiooni $f(m, n) = n + 2$ (m, n – positiivsed naturaalarvud).

4.23 Konstrueerida Turingi masin, mis arvutab funktsiooni $f(m, n) = \min(m, n)$ (m, n – positiivsed naturaalarvud).

4.24 Konstrueerida Turingi masin, mis arvutab funktsiooni $f(m, n) = \max(m, n)$ (m, n – positiivsed naturaalarvud).

4.25 Koostada funktsiooni $f(n, m, k) = n + m$ arvutav Turingi masin.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 116 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.26 Koostada funktsiooni $f(n, m, k) = n+k$ arvutav Turingi masin.

4.27 Koostada funktsiooni

$$f(n) = \begin{cases} n-3, & \text{kui } n \geq 3, \\ 0, & \text{kui } n \in \{1, 2\} \end{cases}$$

arvutav Turingi masin.

4.28 Koostada funktsiooni

$$f(n) = \begin{cases} 3, & \text{kui } n \geq 4, \\ 0, & \text{kui } n \in \{1, 2, 3\} \end{cases}$$

arvutav Turingi masin.

4.29 Koostada funktsiooni $f(n, m, k) = m+k$ arvutav Turingi masin ($n, m, k > 0$).

4.30 Koostada funktsiooni

$$f(n) = \begin{cases} n-2, & \text{kui } n \geq 3, \\ 2, & \text{kui } n \in \{1, 2\} \end{cases}$$

arvutav Turingi masin.

Ülesannetes 4.31–4.34 on eeldatud, et funktsioon $f(x_1, \dots, x_n)$ on lihtrekursiivne ja tuleb näidata, et funktsioon $f_i(x_1, \dots, x_k)$ on samuti lihtrekursiivne.

4.31 $f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, x_1, \dots, x_n)$ (argumentide vahetamine).

4.32 $f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_2, \dots, x_n, x_1)$ (argumentide tsükliline ümberpaigutamine).

4.33 $f_3(x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (fiktiivse argumenti lisamine).

4.34 $f_4(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) = f(x_1, x_1, x_2, \dots, x_{n-1})$ (argumentide võrdsustamine).

Ülesannetes 4.35–4.42 tuleb näidata, et antud funktsioon on lihtrekursiivne.

4.35 $f(x) = x^2$. **4.36** $f(x, y) = x^y$.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 117 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.37 $f(x) = n$ (n – fikseeritud naturaalarv).

$$4.38 \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kui } x = 0, \\ 1, & \text{kui } x > 0. \end{cases}$$

$$4.39 \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{kui } x = 0, \\ 0, & \text{kui } x > 0. \end{cases}$$

$$4.40 \quad f(x, y) = \min(x, y).$$

$$4.41 \quad f(x, y) = \max(x, y).$$

$$4.42 \quad f(x) = x!.$$

4.43 Tõestada, et funktsioon

$$x \div y = \begin{cases} \frac{x}{y}, & \text{kui } x \text{ jagub arvuga } y, \\ \text{pole määratud, kui } x \text{ ei jagu arvuga } y, \end{cases}$$

on osaliselt rekursiivne.

4.44 Tõestada, et funktsioon $f(x) = \sqrt{x}$ on osaliselt rekursiivne.

4.45 Olgu funktsioon $f(x_1, \dots, x_n, y)$ lihtrekursiivne. Näidata, et siis ka funktsioon

$$g(x_1, \dots, x_n, y) = \sum_{i=0}^y f(x_1, \dots, x_n, i)$$

on lihtrekursiivne.

4.46 Olgu funktsioon $f(x_1, \dots, x_n, y)$ lihtrekursiivne. Näidata, et siis ka funktsioon

$$g(x_1, \dots, x_n, y) = \prod_{i=0}^y f(x_1, \dots, x_n, i)$$

on lihtrekursiivne.

4.47 Näidata, kuidas saadakse algfunktsioonidest superpositsioonioperaatori ja lihtrekursioonioperaatoriga funktsioon $f(x) = 2x$.

Ülesannetes 4.48–4.51 rakendada lihtrekursioonioperaatorit antud funktsioonidele φ ja ψ ning leida tekkinud funktsioon $f = P(\varphi, \psi)$.

$$4.48 \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x, y, z) = x + y + z.$$

$$4.49 \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x, y, z) = xyz.$$

$$4.50 \quad \varphi(x) = x, \quad \psi(x, y, z) = xz.$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 118 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.51 $\varphi(x, y) = xy$, $\psi(x, y, z, u) = x + y + z + u$.

Ülesannetes 4.52–4.55 rakendada minimiseerimisoperaatorit antud funktsioonile g ning leida funktsioon $f = M(g)$ ja selle funktsiooni määramispiirkond D .

4.52 $g(x, y) = x + y$.

4.53 $g(x, y) = x - y$.

4.54 $g(x, y) = x$.

4.55 $g(x, y) = xy$.

4.56 Näidata, kuidas saadakse superpositsiooni- ja lihtrekursioonioperaatoriga algfunktsioonidest ja funktsioonist $L(x, y) = x + y$ funktsioon $f(x, y) = x + y^2$.

4.57 Näidata, kuidas saadakse superpositsiooni- ja lihtrekursioonioperaatoriga algfunktsioonidest, funktsioonist $L(x, y) = x + y$ ja funktsioonist $K(x, y) = xy$ funktsioon $f(x, y) = x^2y$.

4.58 Olgu $f(x, y, z) = xz + y$. Näidata, kuidas saadakse superpositsiooni- ja lihtrekursioonioperaatoriga algfunktsioonidest ja funktsioonist $L(x, y) = x + y$ funktsioon f .

4.59 On antud funktsioonid $\varphi(x) = x^2$ ja $\psi(x, y, z) = x + yz$. Olgu f nendest funktsioonidest lihtrekursioonioperaatoriga saadud funktsioon: $f = P(\varphi, \psi)$. Leida $f(4, 5)$.

4.60 On antud funktsioonid $\varphi(x, y) = xy$ ja $\psi(x, y, z, u) = xz + yu$. Olgu f nendest funktsioonidest lihtrekursioonioperaatoriga saadud funktsioon: $f = P(\varphi, \psi)$. Leida $f(x, y, 6)$.

4.61 On antud funktsioonid $\varphi(x, y) = x + y$ ja $\psi(x, y, z, u) = xu + y + z$. Olgu f nendest funktsioonidest lihtrekursioonioperaatoriga saadud funktsioon: $f = P(\varphi, \psi)$. Leida $f(2, y, 3)$.

4.62 On antud lihtrekursiivsed funktsioonid $f(x, y, z)$ ja $K(x, y) = xy$. Defineerime funktsiooni $g(x, y) = f(x, y, 1) \cdot f(x, y, 2)$. Näidata, kuidas on funktsioon g saadav superpositsioonioperaatoriga algfunktsioonidest ja funktsioonidest f ning K .

4.63 On antud lihtrekursiivsed funktsioonid $f(x, y)$, $L(x, y) = x + y$ ja $K(x, y) = xy$. Defineerime funktsiooni $g(x) = f(x, 1) \cdot f(x, 2) + f(x, 0)$. Näidata, kuidas on funktsioon g saadav superpositsioonioperaatoriga algfunktsioonidest ja funktsioonidest f , L ning K .

4.64 On antud lihtrekursiivsed funktsioonid $f(x, y)$, $L(x, y) = x + y$

[Autori koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 119 / 247](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

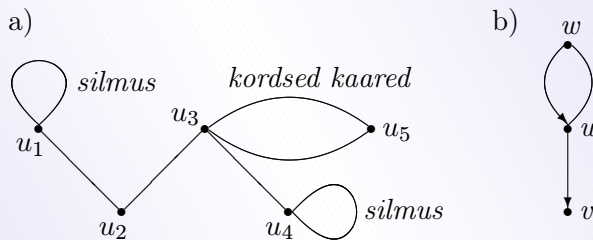
ja $K(x, y) = xy$. Defineerime funktsiooni $g(x) = (f(x, 0) + f(x, 2)) \cdot f(1, x)$. Näidata, kuidas on funktsioon g saadav superpositsioonioperaatoriga algfunktsioonidest ja funktsioonidest f , L ning K .

[Autori koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 120 / 247](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)

5. GRAAFITEORIA ELEMENTE

5.1. Sissejuhatavaid mõisteid

Graafiks $\mathcal{G}$ nimetatakse paari, mis koosneb mittetühjast hulgast T ja hulga T elemendipaaride (u, v) hulgast K ($u, v \in T$). Graafi $\mathcal{G}$ tähistatakse $\mathcal{G} = (T, K)$. Hulga T elemente nimetatakse graafi $\mathcal{G}$ **tip-pudeks**, hulga K elemente aga graafi $\mathcal{G}$ **kaarteks** ehk **servadeks**. Ei nõuta, et iga kahe tipu $u, v \in T$ jaoks leidub kaar (u, v) . Graafi $\mathcal{G}$ piltlikul esitamisel joonisena kujutatakse tippe punktidenä, ringikestena, ristkülikutena jne.. Kaart (u, v) kujutatakse tippe u ja v ühendava sirglõiguna või kaarekujulise joonena (vt joonis 5.1, a)). Käsitleme järgnevalt graafidega seotud mõisteid lähemalt.



Joonis 5.1: Silmused, kordsed ja orienteeritud kaared

Kaare $x = (u, v) \in K$ korral öeldakse, et see kaar **ühendab tippe u ja v** . Öeldakse ka, et u ja v on kaare x **otspunktid**. Veel kasutatakse väljendeid "tipud u ja v on **intsidentsed** kaarega x " või "kaar x on **intsidentne** tippudega u ja v ". Võib vaadelda graafe, milles tippe u ja v ühendab mitte üks, vaid mitu kaart. Sel korral tuleb kaarte eristamiseks kasutada indekseid: $(u, v)_1, (u, v)_2, \dots$. Kaare (u, v) **kordsuseks**²² nimetatakse tippe u ja v ühendavate kaarte arvu. Kaart (u, u) nimetatakse **silmuseks**. Graafi nimetatakse **lõplikuks**, kui temal on lõplik arv tippe ja kaari. Meie vaatleme ainult lõplikke

²²Siin tähis (u, v) tähendab kontekstist sõltuvalt kas ühte tippe u ja v ühendavatest kaartest või neid kõiki.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

Lk 121 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

graafe.

Kaare (u, v) korral on mõningatel juhtudel oluline tippude u ja v järjekord, st paare (u, v) ja (v, u) loetakse erinevaiks. Sel korral nimetatakse kaart (u, v) **orienteeritud kaareks** ja seda kujutatakse joonisel tippe u ja v ühendava lõigu või kaarena, millele on tipu v juurde lisatud nool (vt joonis 5.1, b)). Kui tippude u ja v järjekord pole oluline, ei eristata kaari (u, v) ja (v, u) , st $(u, v) = (v, u)$. Graafi, mille kõik kaared on orienteeritud, nimetatakse **orienteeritud graafiks**. Kui graafi osa kaari on orienteeritud, osa aga mitte, siis seda graafi nimetatakse **segagraafiks**.

Järgnevalt hakkame erinevat tüüpi graafide eristamiseks kasutama järgmist terminoloogiat ²³:

- **Pseudograaf** - on lubatud silmuste ja kordsete kaarte olemasolu graafis, kaared pole orienteeritud.
- **Multigraaf** - pseudograaf, milles puuduvad silmused.
- **Graaf** - multigraaf, milles iga kaare kordsus on 1.
- **Orienteeritud graaf** - graaf, milles kõik kaared on orienteeritud.

Orienteerimata graafe hakkame tähistama sümbolitega $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2, \dots$ ja orienteeritud graafe sümbolitega $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2, \dots$

Märgime, et ühte ja sama graafi saab geomeetriliselt tasandil kujutada mitmel erineval viisil.

Näide 5.1. Olgu antud graaf

$$\begin{aligned}\mathcal{G} &= (T, K), \quad T = \{a, b, c, d, e, g\}, \\ K &= \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, e), (e, g), \\ &\quad (g, a), (a, d), (b, e), (c, g)\}.\end{aligned}$$

See graaf on kujutatud joonisel 5.2 kahel erineval viisil.

²³Sageli on erinevates graafiteooria õpikutes ühele ja samale mõistele antud erinev sisu.

Autori koduleht

Tiitelleht

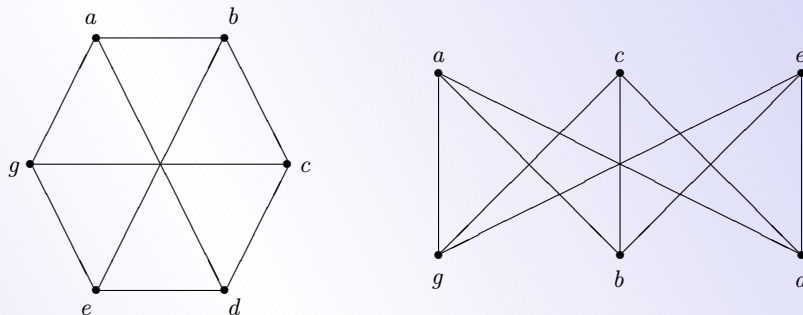


Lk 122 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.2: Graafi erinevaid kujutisi tasandil

Ühe ja sama graafi erinevate kujutiste korral on jooniste järgi küllalt raske ära tunda, et tegemist on ühe ja sama graafiga. Graafide samaväärsust iseloomustab graafide **isomorfismi** mõiste.

Definitsioon 5.2. Graafe $\mathcal{G}_1 = (T_1, K_1)$ ja $\mathcal{G}_2 = (T_2, K_2)$ nimetatakse **isomorfseteks**, kui leidub selline bijektiivne kujutus $\varphi : T_1 \longrightarrow T_2$, et kujutus

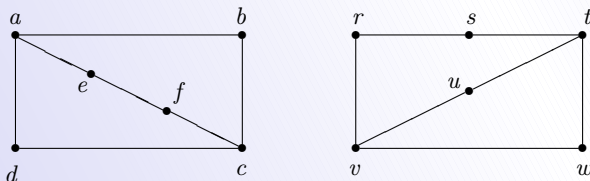
$$\psi : K_1 \longrightarrow K_2, \quad \psi((s, t)) = (\varphi(s), \varphi(t)), \quad s, t \in T_1,$$

on samuti bijektiivne.

Näide 5.3. Joonisel 5.3 kujutatud graafid on isomorfsed: vastav bijektiivne kujutus tippude vahel on

$$a \mapsto t, \quad b \mapsto u, \quad c \mapsto v,$$

$$d \mapsto w, \quad e \mapsto s, \quad f \mapsto r.$$



Joonis 5.3: Näite 5.3 graafid

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 123 / 247

Tagasi

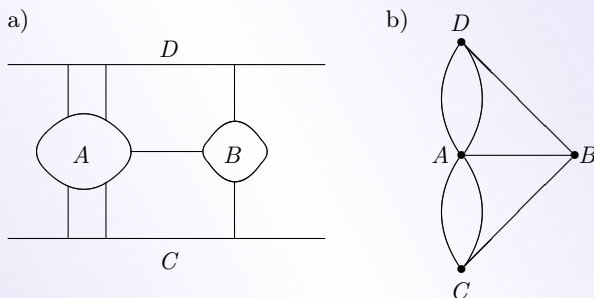
Täisekraan

Lahku failist

5.2. Näiteid graafidega seotud ülesannetest

Tutvume mõne graafiteooria ülesandega. Ajalooliselt esimene neist on järgmine.

Königsbergi sildade ülesanne²⁴ Königsbergi linna (praegune Kaliningrad) läbib Pregeli jõgi, millel linna kohal asub kaks saart, mis on omavahel ühendatud sillaga ja kumbki saar on ühendatud sildade abil kummagi kaldaga nii nagu on skemaatiliselt kujutatud joonisel 5.4, a). Ülesanne seisneb järgnevas. Alustades jalutuskäiku ühelt kaldalt, käia läbi kõik sillad ainult üks kord ja lõpetada jalutuskäik samal kaldal, kust alustati jalutuskäiku. Kas on selline jalutuskäik võimalik?



Joonis 5.4: Königsbergi sillad ja vastav graaf

Lühima tee ülesanne Joonisel 5.5 on kujutatud orienteeritud graaf, mille tipud on nummerdatud. Iga tipp on tõlgendatav asulana. Iga kaare kohale on märgitud selle kaarega seotud arv – selle kaarega ühendatud tippude vaheline kaugus (asulate vaheline kaugus). Ülesanne seisneb lühima tee leidmises tipust 1 tippu 10, kui liikuda ainult noolega näidatud suunas (see nõue pole mingi kitsendus, sest igas teises suunas liikudes ei saada lühimat teed).

Rändkaupmehe ülesanne Rändkaupmees teenindab teatud piir-

²⁴See ülesanne püstitati ja lahendati kuulsalt shveitsi matemaatiku Leonhard Euleri (1707–1783) poolt 1736. aastal Peterburi Teaduste Akadeemia Toimetistes ilmunud artiklis. Mainitud artikkel on üldse esimene graafidele pühendatud artikkel ning see pani alusele graafiteooriale. Seega on graafiteooria üks vähestest matemaatika harudest, mille täpne sünniaeg on teada.

Autori koduleht

Tiitelleht



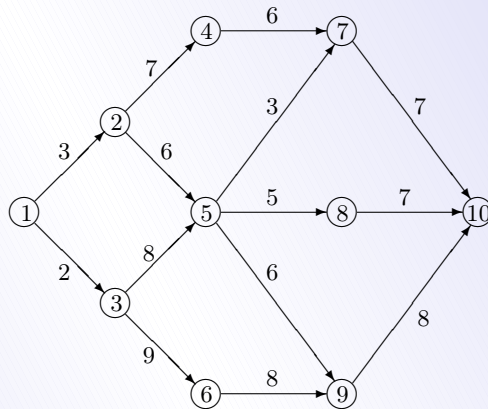
Lk 124 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

konda. Selle piirkonna asulad on ühendatud maanteedevõrguga nii, et igast asulast on võimalik pääseda igasse teise asulasse. Teada on teede pikkused. Rändkaupmees peab leidma lühima kinnise marsruudi, mis läbib kõiki selle piirkonna asulaid parajasti üks kord.



Joonis 5.5: Lühima tee ülesanne

Trasside ülesanne Kolm maja on vaja varustada elektri, gaasi ja veega. Kas on võimalik selleks trassid nii rajada, et juhtmed ega torud omavahel ei lõikuks?

5.3. Intsidentsus. Kaarte graaf

Olgu antud pseudograaf $\mathcal{G} = (T, K)$, kus T on tippude hulk ja K on kaarte hulk. Defineerime järgmised mõisted graafis $\mathcal{G}$:

- Kui $x = (u, v) \in K$, siis öeldakse, et tipud u ja v on **intsidentsed** kaarega x ehk kaar x on **intsidentne** tippudega u ja v . Tippe u ja v nimetatakse sellisel juhul **naabertippudeks**.
- Kui $(u, v) \in K$ ja $(v, w) \in K$, siis öeldakse, et kaared (u, v) ja (v, w) on **naaberkaared**.
- Tipu u (**lokaalseks**) **astmeks** nimetatakse tipuga u intsidentsete kaarte arvu (sõlm (u, u) võetakse arvesse kahekordselt!). Tipu

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 125 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

u astet tähistatakse $\delta(u)$. Kui $\delta(u)$ on paarisarv, siis tippu u nimetatakse **paaristipuks**, vastasel juhul nimetatakse tippu **paarituks tipuks**.

- Kui $\delta(u) = 0$, siis tippu u nimetatakse **isoleeritud tipuks**.
- Kui $\delta(u) = 1$, siis tippu u nimetatakse **rippuvaks tipuks**.

Tähistagu $n(\mathcal{G})$ tippude arvu ja $m(\mathcal{G})$ kaarte arvu pseudograafis $\mathcal{G}$. Siis lihtne on veenduda teoreemide 5.4 ja 5.5 õigsuses.

Teoreem 5.4. Iga pseudograafi $\mathcal{G} = (T, K)$ korral kehtib

$$\sum_{t \in T} \delta(t) = 2m(\mathcal{G}).$$

Teoreem 5.5. Iga orienteeritud pseudograafi $\mathcal{D} = (T, K)$ korral

$$\sum_{t \in T} \delta^+(t) + \sum_{t \in T} \delta^-(t) = 2m(\mathcal{D}),$$

kus $\delta^+(t)$ tähistab tipust t väljuvate kaarte arvu ja $\delta^-(t)$ tähistab tippu t suubuvate kaarte arvu.

Näiteks joonisel 5.5 kujutatud graafis

$$\delta^+(10) = 0, \delta^-(10) = 3, \delta^+(5) = 3, \delta^-(5) = 2.$$

Teoreem 5.6. Igas pseudograafis paaritute tippude arv on paarisarv.

Tõestus. Olgu pseudograafi $\mathcal{G} = (T, K)$ paaritute tippude hulk T_1 ja paaristippude hulk T_2 . Siis teoreemi 5.4 kohaselt

$$2m(\mathcal{G}) = \sum_{t \in T_1} \delta(t) + \sum_{t \in T_2} \delta(t).$$

Viimase võrduse vasak pool ja parema poole teine liidetav on paarisarvud. Seega peab selle võrduse paremal pool asuva summa esimene liidetav olema samuti paarisarv. Et aga selle summa iga liidetav on paaritu, siis peab temas olema paarisarv liidetavaid, st hulgas T_1 peab

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 126 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

olema paarisarv elementi ehk pseudograafil $\mathcal{G}$ on paarisarv paarituid tippe. $\square$

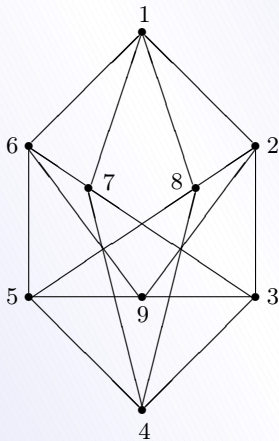
Vaatleme järgnevalt graafi $\mathcal{G} = (T, K)$. Graafi $\mathcal{G}$ saab seostada tema **kaarte graafi** $\mathcal{L}(\mathcal{G}) = (T_0, K_0)$. Graafi $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ tippudeks on graafi $\mathcal{G}$ kaared, st $T_0 = K$, ja $(x, y) \in K_0$ parajasti siis, kui graafi $\mathcal{G}$ kaared x ja y on intsidentsed graafi $\mathcal{G}$ ühe ja sama tipuga.

Näide 5.7. Näites 5.1 kirjeldatud graafi $\mathcal{G}$ kaarte graafi $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ tippudeks on 1, 2, ..., 9, kus

$$1 = (a, b), \quad 2 = (b, e), \quad 3 = (e, g), \quad 4 = (c, g), \quad 5 = (c, d),$$

$$6 = (a, d), \quad 7 = (a, g), \quad 8 = (b, c), \quad 9 = (d, e).$$

Graafi $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ kaared on kujutatud joonisel 5.6.



Joonis 5.6: Näite 5.1 graafi kaarte graaf

Teoreem 5.8. Kui graafis $\mathcal{G} = (T, K)$ on n tippu ja m kaart, siis graafi $\mathcal{G}$ kaarte graafis $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ on m tippu ja m_0 kaart, kus

$$m_0 = -m + \frac{1}{2} \sum_{u \in T} \delta(u)^2.$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 127 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tõestus. Kaarte graafis $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ on definitsiooni kohaselt m tippu. Kuna graafi $\mathcal{G}$ tipuga u on $\delta(u)$ intsidentset kaart, siis nendele kaarte kui graafi $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ tippudele vastavaid kaari graafis $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ on $C_{\delta(u)}^2$. Seetõttu

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{2} \sum_{u \in T} \delta(u)(\delta(u) - 1) = \frac{1}{2} \left(\sum_{u \in T} (\delta(u))^2 - \sum_{u \in T} \delta(u) \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sum_{u \in T} (\delta(u))^2 - 2m \right) = -m + \frac{1}{2} \sum_{u \in T} \delta(u)^2. \end{aligned}$$

□

5.4. Graafiga seotud maatriksid

Olgu vaadeldavas graafis $\mathcal{G} = (T, K)$ n tippu ja m kaart. Tähistagem tipud numbritega $1, 2, \dots, n$ ja kaared numbritega $1, 2, \dots, m$:

$$T = \{1, 2, \dots, n\}, \quad K = \{1, 2, \dots, m\}.$$

Seostame graafiga $\mathcal{G}$ maatriksid $A = \|a_{ij}\|$ ja $B = \|b_{ik}\|$ järgmiselt:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{kui } (i, j) \in K, \\ 0, & \text{kui } (i, j) \notin K, \end{cases}$$

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{kui tipp } i \text{ on intsidentne kaarega } k, \\ 0, & \text{kui tipp } i \text{ pole intsidentne kaarega } k, \end{cases}$$

$(i, j = 1, 2, \dots, n; k = 1, 2, \dots, m)$. Kuna graaf $\mathcal{G}$ pole orienteeritud, siis iga kaare (i, j) korral $(i, j) = (j, i)$, st maatriks A on sümmeetriline. Maatriksit A nimetatakse vaadeldava graafi **kaassusmaatriksiks**, maatriksit B aga selle graafi **intsidentsusmaatriksiks**.

Näide 5.9. Joonisel 5.7 kujutatud graafis on tipud ja kaared nummerdatud. Sellise numeratsiooni korral on vaadeldava graafi kaassus- ja intsidentsusmaatriks järgmised:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

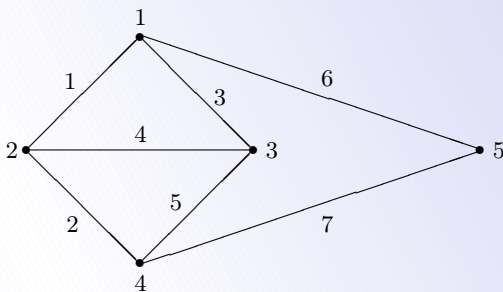
◀ ▶

Lk 128 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.7: Näite 5.9 graaf

Teoreem 5.10. Olgu graafi $\mathcal{G}$ intsidentsusmaatriks B ja graafi $\mathcal{G}$ kaarte graafi $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ kaassusmaatriks A_0 . Siis

$$A_0 = B^T B - 2E, \quad (5.1)$$

kus E on $m(\mathcal{G})$ -ndat järku ühikmaatriks.

Teoreemi 5.10 me ei tõesta.

Kui graaf $\mathcal{G}$ on orienteeritud, siis tema kaassusmaatriks A defineeritakse nii nagu ülal defineeriti see orienteerimata graafi korral, intsidentsusmaatriks $B = \|b_{ik}\|$ aga defineeritakse võrdusega

$$b_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{kui tipp } i \text{ on kaare } k \text{ lõpptipp,} \\ -1, & \text{kui tipp } i \text{ on kaare } k \text{ algustipp,} \\ 0, & \text{kui tipp } i \text{ pole intsidentne kaarega } k. \end{cases}$$

Näide 5.11. Joonisel 5.8, a) kujutatud orienteeritud graafi kaassusmaatriks A ja intsidentsusmaatriks B on

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Kaassusmaatriksit saab defineerida ka pseudograafi jaoks. Olgu $\mathcal{G}$ pseudograaf tippudega $1, 2, \dots, n$. Tema kaassusmaatriksiks nimetatakse n -ndat järku ruutmaatriksit $A = \|a_{ij}\|$, kus

$$a_{ij} = \begin{cases} k, & \text{kui } (i, j) \text{ on kaar kordsusega } k, \\ 0, & \text{kui graafis } \mathcal{G} \text{ puudub kaar } (i, j). \end{cases}$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 129 / 247

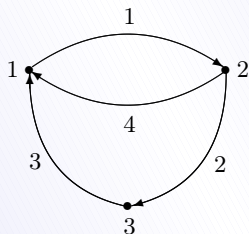
Tagasi

Täisekraan

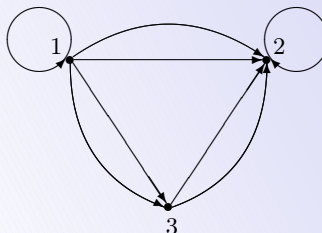
Lahku failist

See definitsioon sobib ka orienteeritud pseudograafi jaoks.

a)



b)



Joonis 5.8: Näidete 5.11 ja 5.12 orienteeritud graafid

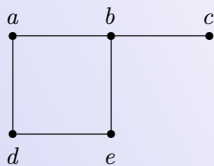
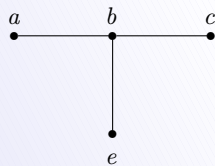
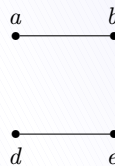
Näide 5.12. Joonisel 5.8, b) kujutatud orienteeritud pseudograafi kaassusmaatriks on

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

5.5. Alamgraaf

Vaadeldgem pseudograafi $\mathcal{G} = (T, K)$.

Definitsioon 5.13. Pseudograafi $\mathcal{G}$ **alampseudograafiks** nimetakse pseudograafi $\mathcal{G}_0 = (T_0, K_0)$, mille korral $T_0 \subset T$ ja $K_0 \subset K$.

a) $\mathcal{G}$ b) $\mathcal{G}_1$ c) $\mathcal{G}_2$ 

Joonis 5.9: Graaf ja kaks tema alamgraafi

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 130 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 5.14. Joonisel 5.9 on kujutatud graaf $\mathcal{G}$ ja tema kaks alamgraafi $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$.

Olgu $\mathcal{G} = (T, K)$ graaf ja u tema tipp, st $u \in T$. Siis võib vaadelda graafi $\mathcal{G} - u$, mis tekib graafist $\mathcal{G}$ tipu u ja selle tipuga intsidentsete kaarte eemaldamisel:

$$\mathcal{G} - u = (T_0, K_0), \quad T_0 = T \setminus \{u\},$$

$$K_0 = \{ (v, w) \mid v, w \in T_0, (v, w) \in K \}.$$

Näide 5.15. Joonisel 5.9, b) kujutatud graaf $\mathcal{G}_1$ on joonisel 5.9, a) kujutatud graafi $\mathcal{G}$ alamgraaf $\mathcal{G} - d$.

S.M.Ulam püstitas hüpoteesi, et iga graaf $\mathcal{G}$ on täielikult määratud, kui on teada selle graafi kõik alamgraafid kujul $\mathcal{G} - u$. Täpsemalt formuleerides:

Ulami hüpotees Olgu nii graafi $\mathcal{G}$ kui ka graafi $\mathcal{H}$ tippude arv n : $u_1, \dots, u_n$ – graafi $\mathcal{G}$ tipud, $v_1, \dots, v_n$ – graafi $\mathcal{H}$ tipud. Kui $n \geq 3$ ja iga $i = 1, \dots, n$ korral on alamgraafid $\mathcal{G} - u_i$ ja $\mathcal{H} - v_i$ isomorfsed, siis on ka graafid $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{H}$ isomorfsed.

Ulami hüpoteesi pole seni tõestada õnnestunud²⁵.

5.6. Marsruudid graafis

Olgu antud pseudograaf $\mathcal{G} = (T, K)$.

Definitsioon 5.16. Tippude jada $t_1, \dots, t_k$ nimetatakse **marsruudiks** (tipust t_1 tippu t_k), kui selles jadas iga kaks järjestikust tippu on ühendatud kaarega, st $(t_i, t_{i+1}) \in K$ iga $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ korral. Marsruuti $t_1, \dots, t_k$ nimetatakse **kinniseks**, kui $t_1 = t_k$. Marsruuti $t_1, \dots, t_k$ nimetatakse **ahelaks**, kui kõik temas esinevad kaared $(t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots, (t_{k-1}, t_k)$ on erinevad. Kinnist ahelat nimetatakse **tsükliks**. Ahelat $t_1, \dots, t_k$, milles tipud $t_1, \dots, t_{k-1}$ on erinevad, nimetatakse **lihtahelaks**. Lihtahelat, mis on tsükkel, nimetatakse

²⁵F.Harary oma raamatus "Graph theory" ei soovita Ulami hüpoteesi kehtivuse põhjendamisele aega raisata, kuna loeb seda liiga keeruliseks.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 131 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

lihttsükliks. Kahte kinnist marsruuti $s_1, s_2, \dots, s_k$ ja $t_1, t_2, \dots, t_l$ loetakse **võrdseks**, kui $k = l$ ja leidub selline indeks i , et

$$s_1 = t_i, s_2 = t_{i+1}, \dots, s_{k-i+1} = t_k, s_{k-i+2} = t_2, \\ s_{k-i+3} = t_3, \dots, s_k = t_i.$$

Näide 5.17. Vaatleme järgmisi marsruute joonisel 5.6 kujutatud graafis:

$$\mu_1 = (1, 8, 5, 4, 8, 1, 6), \quad \mu_2 = (2, 8, 4, 5, 8), \\ \mu_3 = (2, 8, 4, 5, 8, 1, 2), \quad \mu_4 = (1, 7, 4, 8, 5, 6, 1).$$

Marsruut μ_1 pole ahel, sest kaar $(1, 8)$ esineb temas kaks korda. Marsruut μ_2 on ahel, kuid pole lihtahel, sest tipp 8 esineb temas kaks korda. Marsruut μ_3 on tsükkel, kuid pole lihttsükkel. Marsruut μ_4 on lihttsükkel. Tsüklid μ_3 ja $4, 5, 8, 1, 2, 8, 4$ on võrdsed.

Definitsioon 5.18. Marsruudi $\mu = (t_1, \dots, t_k)$ **pikkuseks** nimetatakse temas esinevate kaarte (t_i, t_{i+1}) arvu. Marsruudi μ pikkust tähistatakse $d(\mu) = d(t_1, \dots, t_k)$. Marsruuti pikkusega r nimetatakse **r -marsruudiks**.

Näide 5.19. Näites 5.17 loetletud marsruutide pikkused on

$$d(\mu_1) = d(\mu_3) = d(\mu_4) = 6, \quad d(\mu_2) = 4.$$

Teoreem 5.20. Olgu $\mathcal{G} = (T, K)$ pseudograaf tippude hulgaga $T = \{1, 2, \dots, n\}$, $A = \|a_{ij}\|$ selle graafi kaassusmaatriks ja

$$A^k = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_k = \|a_{ij}^{(k)}\|.$$

Siis $a_{ij}^{(k)}$ võrdub kõigi k -marsruutide arvuga tipust i tippu j ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Tõestus. Tõestame teoreemi väite induktsiooniga arvu k järgi. Kui $k = 1$, siis k -marsruutide arv tipust i tippu j võrdub kaarte $(i, j) \in K$ arvuga $a_{ij} = a_{ij}^{(1)}$ ja sel juhul teoreemi väide kehtib.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 132 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Eeldame järgnevalt, et $k > 1$ ning arvust k väiksemate astmenäitajate korral väide kehtib. Tähistagu $\rho(i, j, r)$ kõigi r -marsruutide arvu tipust i tippu j ja $\rho(i, j, l, r)$ kõigi selliste r -marsruutide arvu tipust i tippu j , mille korral marsruudi eelviimane tipp on l . Ilmselt

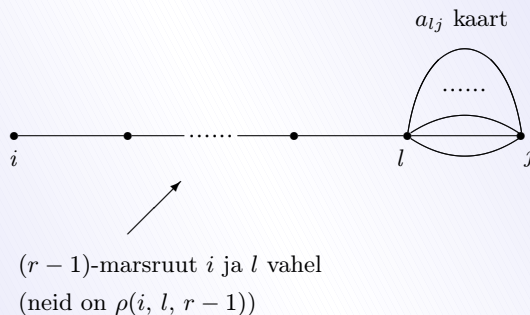
$$\rho(i, j, r) = \sum_{l=1}^n \rho(i, j, l, r). \quad (5.2)$$

Teisalt

$$\rho(i, j, l, r) = \rho(i, l, r-1) \cdot a_{lj} \quad (5.3)$$

(vt joonist 5.10). Induktsiooni eelduse kohaselt

$$\rho(i, l, k-1) = a_{il}^{(k-1)}. \quad (5.4)$$



Joonis 5.10: Marsruutide arv läbi tippu l

Seostest (5.2)–(5.4) järeldub

$$\begin{aligned} \rho(i, j, k) &= \sum_{l=1}^n \rho(i, j, l, k) = \\ &= \sum_{l=1}^n \rho(i, l, k-1) \cdot a_{lj} = \sum_{l=1}^n a_{il}^{(k-1)} a_{lj}. \end{aligned}$$

Maatriksite korrutamise reegli järgi võrdub viimane summa maatriksi $A^{k-1} \cdot A$ i -nda rea ja j -nda veeru elemendiga $a_{ij}^{(k)}$. Seega $\rho(i, j, k) =$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀ ▶▶

◀ ▶

Lk 133 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$a_{ij}^{(k)}$, st teoreemi väide kehtib ka astmenäitaja k korral. Vastavalt induktsiooniprintsiibile kehtib väide iga $k \geq 1$ korral. $\square$

Näide 5.21. Vaatleme joonisel 5.9, a) kujutatud graafi $\mathcal{G}$. Nummerdame selle tipud järgmiselt:

$$1 = a, \quad 2 = b, \quad 3 = c, \quad 4 = d, \quad 5 = e.$$

Graafi $\mathcal{G}$ kaassusmaatriks on

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Leides A^4 , saadakse

$$A^4 = \begin{bmatrix} 9 & 0 & 5 & 0 & 9 \\ 0 & 13 & 0 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 10 & 0 & 8 & 0 \\ 9 & 0 & 5 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

Siit maatriksist saadakse kõigi 4-marsruutide arvud antud graafi igast tipust mis tahes teise tippu. Näiteks $a_{13}^{(4)} = 5$, st tipust 1 = a tippu 3 = c leidub 5 marsruuti, milles on 4 kaart. Kerge on näha, et need marsruudid on

$$(1, 2, 1, 2, 3), \quad (1, 2, 3, 2, 3), \quad (1, 4, 5, 2, 3),$$

$$(1, 4, 1, 2, 3), \quad (1, 2, 5, 2, 3).$$

Marsruudi definitsioon on rakendatav ka orienteeritud pseudograafis $\mathcal{D} = (T, K)$, tuleb ainult arvestada, et orienteeritud graafis kaared (u, v) ja (v, u) on erinevad ($u \neq v$). Marsruuti orienteeritud graafis nimetatakse **teeks**. Seega **teeks** tipust t_1 tippu t_k nimetatakse tippude jada $t_1, t_2, \dots, t_k$, kus $(t_i, t_{i+1}) \in K$ iga $i \in \{1, 2, \dots, k-1\}$ korral. Tee $t_1, t_2, \dots, t_k$ **pikkuseks** nimetatakse temas esinevate kaarte arvu $k-1$. Teed pikkusega r nimetatakse **r -teeks**. Teoreem 5.20 kehtib ka orienteeritud pseudograafi jaoks:

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 134 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Teoreem 5.22. Olgu $\mathcal{D} = (T, K)$ orienteeritud pseudograaf tippude hulgaga $T = \{1, 2, \dots, n\}$, $A = \|a_{ij}\|$ selle graafi kaassusmaatriks ja

$$A^k = \underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_k = \|a_{ij}^{(k)}\|.$$

Siis $a_{ij}^{(k)}$ võrdub kõigi k -teede arvuga tipust i tippu j ($i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$).

Näide 5.23. Vaatleme joonisel 5.8, a) kujutatud orienteeritud graafi $\mathcal{D}$. Selle graafi kaassusmaatriks A esitati näites 5.11. Leides A^4 , saadakse

$$A^4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Siin $a_{21}^{(4)} = 2$, st tipust 2 tippu 1 leidub 2 erinevat teed pikkusega 4. Need on: 2, 1, 2, 3, 1 ja 2, 3, 1, 2, 1.

5.7. Sidus graaf

Graafiteooria üheks oluliseks mõisteks on sidususe mõiste.

Definitsioon 5.24. Pseudograafi $\mathcal{G}$ nimetatakse **sidusaks**, kui tema iga kahe erineva tipu u ja v korral leidub marsruut tipust u tippu v . Orienteeritud pseudograafi $\mathcal{D}$ nimetatakse **sidusaks**, kui tema iga kahe erineva tipu u ja v korral leidub tee tipust u tippu v .

Olgu $\mathcal{G} = (T, K)$ sidus pseudograaf. Siis iga kahe erineva tipu $u, v \in T$ korral leidub alati neid ühendav marsruut. Selle marsruudi leidmine on lihtne juhul, kui tippe ja kaari on vähe. Võimalik on anda algoritm tippe u ja v ($u \neq v$) ühendava marsruudi leidmiseks.

G.Tarry algoritm Olgu antud sidusa pseudograafi erinevad tipud u ja v . Lähtudes tipust u , minnakse järk-järgult ühelt tipult üle mööda kaart selle tipu kaastipule järgmiste reeglite kohaselt:

1) minnes tipult mööda kaart üle selle tipu kaastipule, märkida alati ära mineku suund;

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 135 / 247

Tagasi

Täisekraan

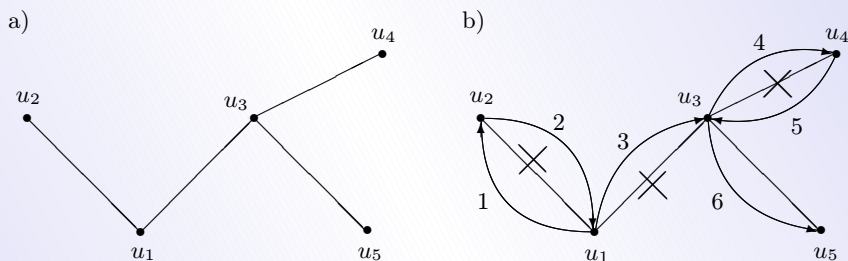
Lahku failist

2) üle minna mingilt tipult w selle tipu kaastipule võib ainult mööda suunaga märgimata kaart või juba suunaga märgitud kaarega vastupidises suunas;

3) kui üleminekul ühelt tipult teisele tipule w tippu w jõutakse esimest korda, siis vastav kaar märgitakse lisaks suunale ära ka mingi sümboliga, näiteks ristikesega;

4) üleminekul võib tipust w üle minna tema kaastipule mööda risti-ga märgitud kaart ainult juhul, kui pole muid üleminekuvõimalusi.

Saab näidata, et nii jõutakse varem või hiljem kirjeldatud ülemine-kutega tipust u tipuni v .



Joonis 5.11: Tarjan algoritm

Näide 5.25. Leiame Tarjan algoritmiga joonisel 5.11, a) kujutatud graafi punkte u_1 ja u_5 ühendava marsruudi. Liikumiste järjekord on kujutatud joonisel 5.11, b). Esimene üleminek mingisse tippu on märgendatud ristikesega, kusjuures see on paigutatud lähemale tipule, millesse minnakse. Esimene üleminek tipust u_1 tippu u_2 on juhuslikult valitud. Teine üleminek $u_2 \rightarrow u_1$ on juba üheselt määratud. Järgmisel sammul pole algoritmi 4) osa põhjal enam võimalik tipust u_1 tippu u_2 tagasi pöörduda. Neljas üleminek on valitud juhuslikult (oleks võidud minna ka kohe tippu u_5). Viies üleminek on juba üheselt määratud. Edasi pole algoritmi 2) tingimuse põhjal võimalik tippu u_4 tagasi pöörduda. Tingimuse 4) põhjal pole ka võimalik üle minna tippu u_1 . Ainuvõimalik on üleminek tippu u_5 . Vajalik marsruut on leitud.

Autori koduleht

Tiitelleht

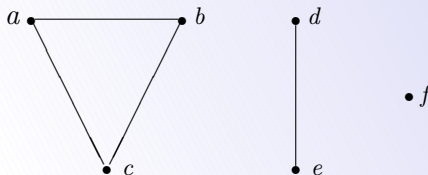
◀ ▶

Lk 136 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.12: Sidususe komponendid

Vaadelgem järgnevalt mis tahes pseudograafi $\mathcal{G} = (T, K)$. Defineerime tippude hulgal T binaarse seose σ järgnevalt: $u\sigma v$ parajasti siis, kui $u = v$ või leidub tippe u ja v ühendav marsruut. Kerge on näha, et seos σ on ekvivalentsiseos hulgal T . Tippude hulk T jaotub ekvivalentsiklasside ühendiks:

$$T = \cup_{i=1}^m T_i; \quad T_i \cap T_j = \emptyset, \text{ kui } i \neq j.$$

Ühte ekvivalentsiklassi on kokku võetud kõik omavahel ekvivalentsed tipud. Tähistagu K_i kõigi nende kaarte $(u, v) \in K$ hulka, mille korral $u, v \in T_i$:

$$K_i = \{ (u, v) \mid u, v \in T_i, (u, v) \in K \}.$$

Siis

$$K = \cup_{i=1}^m K_i; \quad K_i \cap K_j = \emptyset, \text{ kui } i \neq j.$$

Tekkinud pseudograafid $\mathcal{G}_i = (T_i, K_i)$; $i = 1, \dots, m$, on sidusad ja neid nimetatakse pseudograafi $\mathcal{G} = (T, K)$ **sidususe komponentideks**.

Näide 5.26. Joonisel 5.12 kujutatud graafil on kolm sidususe komponenti.

5.8. Euleri tsüklid

Vaatleme mis tahes multigraafi.

Definitsioon 5.27. Tsükli, mis läbib sidusa multigraafi kõiki kaari, nimetatakse **Euleri tsüklik**s.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 137 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Teoreem 5.28 (Euleri teoreem). *Olgu $\mathcal{G}$ sidus multigraaf. Siis multigraafil $\mathcal{G}$ leidub tema kõiki kaari läbiv tsükkel parajasti siis, kui tema kõik tipud on paaristipud.*

Tõestus. Olgu multigraaf $\mathcal{G}$ sidus. Eeldame, et graafil $\mathcal{G}$ leidub tema kõiki kaari läbiv tsükkel. Valime selle graafi mis tahes tipu t . Lähtudes graafi mis tahes tipust ja liikudes mööda tsükliga määratud marsruuti, jõuame lõpuks lähtetippu tagasi. Seejuures läbitakse graafi iga kaar parajasti üks kord. Sellel liikumisel igal tipu t läbimisel ämmendame" kaks selle tipuga intsidentsed kaart - tippu sisenedes ühe kaare ja tippust väljudes ühe kaare. Mõnel teisel tipu t läbimisel neid kaari enam ei kasutata tsükli definitsiooni tõttu. Seega peab tipuga t intsidentseid kaari olema paarisarv. Teoreem on ühes suunas tõestatud.

Eeldame nüüd, et graafi $\mathcal{G}$ kõik tipud on paaristipud ja näitame, et leidub graafi kõiki kaari sisaldav tsükkel. Võib eeldada, et graafil on rohkem kui üks tipp.

Näitame kõigepealt, et graafis $\mathcal{G}$ leidub tsükleid. Valime mis tahes tipu t_1 . Kuna graaf on sidus ja tippude arv on suurem ühest, siis leidub tipuga t_1 intsidentne kaar (t_1, t_2) . Kuna tipp t_2 on paaristipp, siis leidub temaga intsidentne kaar (t_2, t_3) , mis erineb kaarest (t_1, t_2) . Kui $t_3 = t_1$, siis on saadud tsükkel. Kui $t_3 \neq t_1$, siis leidub tipuga t_3 kui paaristipuga intsidentne kaar (t_3, t_4) . Kui t_4 võrdub ühega eelnevalt saadud tippudest t_1, t_2 , siis kaarte (t_1, t_2) , (t_2, t_3) ja (t_3, t_4) seast saab eraldada välja tsükli. Kui aga mitte, siis leidub tipuga t_4 kui paaristipuga intsidentne kaar (t_4, t_5) . Kui tipp t_5 võrdub ühega eelnevalt saadud tippudest t_1, t_2, t_3 (st $t_5 = t_i$, $i \leq 3$), siis juba vaadeldud tippudest saab moodustada tsükli $t_i, t_{i+1}, \dots, t_5$. Kui t_5 ei võrdu ühegagi eelnevalt tekkinud tippudest t_1, t_2, t_3 , siis leidub temaga intsidentne kaar (t_5, t_6) . Analoogiliselt jätkates saadakse erinevate tippude jada $t_1, t_2, \dots, t_m$. Kuna tippude arv on lõplik (vaatleme ju ainult lõplikke graafe!), siis konstruktsiooni jätkates peab tekkima mingil sammul olukord, kus saadav tipp võrdub ühega eelnevalt saadud tippudest, st leidub $k \geq 3$ nii, et $t_k = t_i$, $i \leq k - 2$. Siis $t_i, t_{i+1}, \dots, t_k$ on tsükkel graafis $\mathcal{G}$. On näidatud, et graafis $\mathcal{G}$ leidub tsükleid.

Olgu $t_1, t_2, \dots, t_n = t_1$ suurima kaarte arvuga tsükkel graafis $\mathcal{G}$. Kui see tsükkel läbib graafi $\mathcal{G}$ kõiki kaari, siis teoreemi väide kehtib.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 138 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Oletame, et see tsükkel ei läbi graafi $\mathcal{G}$ kõiki kaari. Vaatleme graafi $\mathcal{G}_1$, mis tekib graafist $\mathcal{G}$ tsükliga $t_1, t_2, \dots, t_n$ määratud kaarte eemaldamisel. Ka graafi $\mathcal{G}_1$ kõik tipud on paaristipud. Eelduse kohaselt leidub graafis $\mathcal{G}_1$ vähemalt üks kaar (s, t) . Veendume, et tipp s ei esine tippude $t_1, t_2, \dots, t_n$ seas. Tõestuse esimese osaga analoogiliselt arutledes saadakse graafis $\mathcal{G}_1$ tsükkel $s = s_1, s_2, \dots, s_k = s_1 = s$. Kui tipp s esineks tippude $t_1, t_2, \dots, t_n$ seas, näiteks $s = s_1 = t_i$, siis tsüklitest $t_1, t_2, \dots, t_n$ ja $s_1, s_2, \dots, s_k$ saab moodustada ühendtsükli

$$t_1, t_2, \dots, t_i = s_1, s_2, \dots, s_k = t_i, t_{i+1}, \dots, t_n,$$

milles aga on rohkem kaari kui tsükli $t_1, \dots, t_n$. See on vastuolus tsükli $t_1, \dots, t_n$ valikuga. Seega tipp s ei esine tippude $t_1, \dots, t_n$ seas. Analoogiliselt ei esine tippude $t_1, \dots, t_n$ seas tipp t .

Kuna graaf $\mathcal{G}$ on sidus, siis leidub marsruut $t_1 = u_1, u_2, \dots, u_m = s$ tipust t_1 tippu s . Olgu u_j esimene tippudest $t_1, \dots, t_n$ erinev tipp selles marsruudis. Siis $j > 1$, $u_{j-1} = t_i$ indeksi i mingi väärtuse korral ja kaar $(u_{j-1}, u_j) = (t_i, u_j)$ ei esine tsükli $t_1, \dots, t_n$. Eelpool näidati, et sellisel juhul tipp t_i ei esine tippude $t_1, \dots, t_n$ seas. See aga pole võimalik. Saadud vastuolu näitab, et vaadeldav tsükkel $t_1, \dots, t_n$ peab sisaldama graafi $\mathcal{G}$ kõik kaared. $\square$

Königsbergi sildade ülesande lahendus Sellele ülesandele vastab joonisel 5.4, b) kujutatud multigraaf $\mathcal{G}$. Multigraaf $\mathcal{G}$ on sidus. Tema tippude astmed on $\delta(A) = 5$, $\delta(B) = 3$, $\delta(C) = \delta(D) = 3$. Seega vaadeldava multigraafi tippude seas leidub paarituid tippe ja Euleri teoreemi kohaselt ei leidu kõiki kaari läbivat tsükli. Seega pole võimalik teha ülesande tingimuste nõuetele vastavat jalutuskäiku.

5.9. Hamiltoni tsüklid

Vaatleme pseudograafi $\mathcal{G} = (T, K)$.

Definitsioon 5.29. **Hamiltoni**²⁶ **ahelaks** pseudograafis $\mathcal{G}$ nimetatakse selle graafi kõiki tippe läbivat lihtahelat. **Hamiltoni tsükliks**

²⁶William Rowan Hamilton (1805-1865) – iiri matemaatik, saavutas silmapaistvaid tulemusi optikas, abstraktses algebras ja dünaamikas. Tema poolt võeti kasutusele kvaternioonid.

Autori koduleht

Tiitelleht



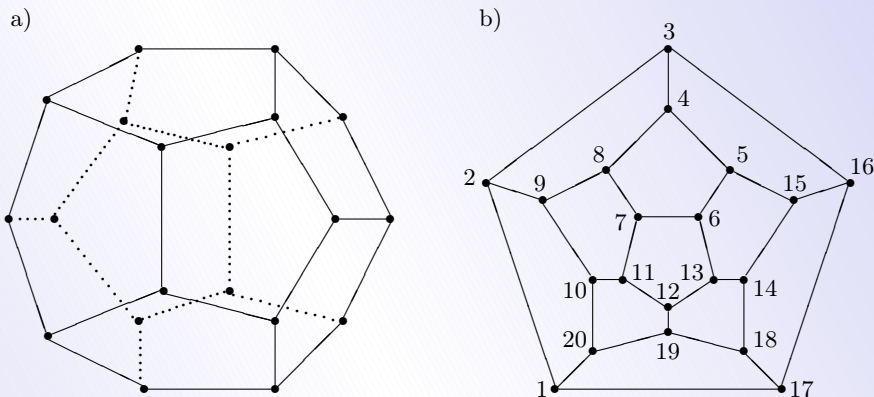
Lk 139 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

pseudograafis $\mathcal{G}$ nimetatakse selle graafi lihttsükliks, milles esinevad selle graafi kõik tipud.



Joonis 5.13: Dodekaeedri ja sellele vastav graaf

Näide 5.30. Hamilton püstitas 1859.a. järgmise ülesande. Ta vaatlis korrapäraselt dodekaeedrit (joonis 5.13, a)), st kaheteistkümnest korrapärasest viisnurgast koosnevat hulktahukat, mille igast tipust väljub kolm serva. Dodekaeedri igale tipule omistas Hamilton tuntud linna nime. Ülesanne seisnes selles, et mingist linnast alustades tuli leida tee piki dodekaeedri servi nii, et see tee läbiks kõiki linna täpselt üks kord (ilmselt ei saa siis ka ühte serva läbida kaks korda) ja jõuaks esialgsesse linna tagasi. Dodekaeedri tippudele ja servadele vastab joonisel 5.13, b) kujutatud graaf. Püstitatud ülesanne on samaväärne Hamiltoni tsükli leidmisele selles graafis. Ülesande lahendamiseks olev Hamiltoni tsükkel on $1, 2, 3, \dots, 20, 1$.

Hamiltoni tsüklitega on seotud nn **rändkaupmehe ülesanne**, mis seisneb järgnevas. On antud n asulat ja nende vahelised kaugused. Tuleb leida lühim kinnine marsruut, mis läbib kõiki antud asulaid parajasti üks kord. Nii Hamiltoni tsüklite leidmist graafis kui ka rändkaupmehe ülesannet loetakse matemaatikas klassikaliselt rasketeks ülesanneteks, millele jätkuvalt otsitakse efektiivseid lahendusmeetodeid.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 140 / 247

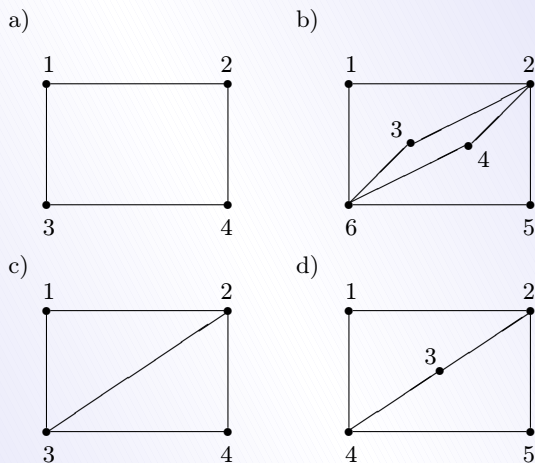
Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Ehkki Euleri ja Hamiltoni tsükli mõisted on sarnased, on need mõisted siiski sõltumatud. Selles veenab meid järgmine näide.

Näide 5.31. Vaatleme joonisel 5.14 kujutatud nelja graafi. Graafidel a) ja c) leiduvad Hamiltoni tsüklid. Nendeks on vastavalt 1, 2, 3, 4, 1 ja 1, 2, 3, 4, 1. Graafidel b) ja d) ei leitu Hamiltoni tsükleid. Graafidel a) ja b) leiduvad Euleri tsüklid. Nendeks on vastavalt 1, 2, 3, 4, 1 ja 1, 2, 3, 6, 4, 2, 5, 6, 1. Graafidel c) ja d) aga Euleri tsüklid puuduvad.



Joonis 5.14: Näites 5.31 esinevad graafid

Hamiltoni ahela ja tsükli definitsioonidest järeldub, et nende olemasolu korral peab vaadeldav pseudograaf olema sidus. Kahjuks pole seni teada suhteliselt lihtsaid tarvilikke ja piisavaid tunnuseid otsustamiseks, kas vaadeldaval graafil leidub Hamiltoni ahel või tsükel. Küll on aga teada terve rida piisavaid tingimusi selleks. Sõnastame siinkohal nendest ühe ilma tõestuseta.

Teoreem 5.32. Olgu sidusas graafis $\mathcal{G} = (T, K)$ n tippu. Kui $n \geq 4$ ja $\delta(u) \geq n/2$ iga $u \in T$ korral, siis graafis $\mathcal{G}$ leidub Hamiltoni tsükel.

Näide 5.33. Joonisel 5.15 kujutatud graafil on $n = 5$ tippu ja iga tipu u aste $\delta(u)$ on 4, st suurem kui arv $n/2$. Teoreemi 5.32 kohaselt omab vaadeldav graaf Hamiltoni tsükli. Arvame, et lugeja leiab hõlpsalt vähemalt ühe Hamiltoni tsükli selles graafis.

Autori koduleht

Tiitelleht

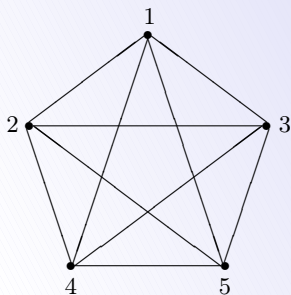


Lk 141 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



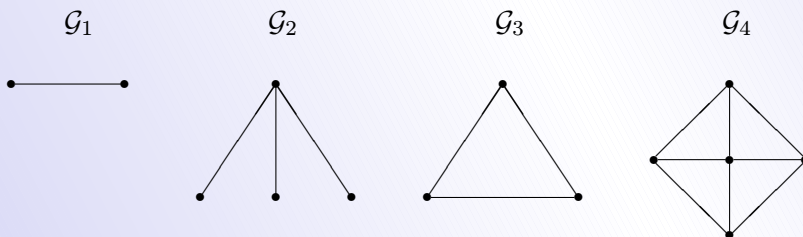
Joonis 5.15: Näite 5.33 graaf

5.10. Tasandilised graafid

Vaadelgem graafi $\mathcal{G}$. Nagu eelpool mainitud, kujutatakse graafi $\mathcal{G}$ tippe punktidenä tasandil ning kaart (u, v) punkte u ja v ühendava pideva joonena.

Definitsioon 5.34. Graafi $\mathcal{G}$ nimetatakse **planaarseks**, kui teda saab kujutada tasandil nii, et kaari kujutavad jooned lõikuvad üksnes selle graafi tippudes. Kui planaarne graaf on juba kujutatud kirjeldatud viisil, siis nimetatakse seda graafi **tasandiliseks graafiks**.

Näide 5.35. Joonisel 5.16 on esitatud neli tasandilist graafi $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{G}_3$, $\mathcal{G}_4$.



Joonis 5.16: Tasandilisi graafe

Näide 5.36. Joonisel 5.17, a) kujutatud graaf on planaarne. Selle graafi üks võimalikest esitustest tasandilise graafina on antud joonisel 5.17, b).

Autori koduleht

Tiitelleht

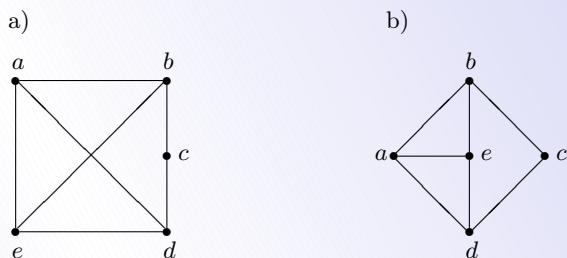


Lk 142 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.17: Planaarne graaf ja temale vastav tasandiline graaf

Definitsioon 5.37. Hulknurkseks graafiks nimetatakse tasandilist graafi, milles on vähemalt üks kaar ja mille iga kaar sisaldub selle graafi mingis lihttsükklis.

Näide 5.38. Joonisel 5.16 kujutatud graafidest on hulknurksed vaid graafid $\mathcal{G}_3$ ja $\mathcal{G}_4$. Joonisel 5.17, b) kujutatud tasandiline graaf on hulknurkne.

Hulknurkse graafi $\mathcal{G}$ iga lihttsükkel τ eraldab tasandist, millel see graaf on kujutatud, tõkestatud piirkonna. Kui see piirkond ei sisalda mõne teise lihttsükliga piiratud piirkonda, siis vaadeldavat tsükli τ nimetatakse **minimaalseks lihttsüklik** ja selle tsükliga piiratud piirkonda nimetatakse graafi $\mathcal{G}$ **tahuks**. Tasandi ülejäänud osa, mis jääb väljapoole minimaalsete lihttsüklitega piiratud ala ning on seega tõkestamata, loetakse samuti graafi $\mathcal{G}$ tahuks. Hulknurkse graafi korral räägitakse kaare asemel servast.

Näide 5.39. Joonisel 5.17, b) kujutatud tasandilise graafi minimaalsed lihttsükliid on

$$\tau_1 = (a, b, e, a), \quad \tau_2 = (a, d, e, a), \quad \tau_3 = (b, c, d, e, b).$$

Seega on sellel hulknurksel graafil 4 tahku – kolm tõkestatud tahku ja üks tõkestamata tahk.

Minimaalse lihttsükliga $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ piiratud tahku võib samastada selle tsükliga.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 143 / 247

Tagasi

Täisekraan

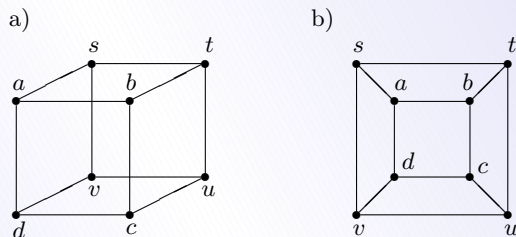
Lahku failist

Näide 5.40. Kuubil on 6 tahku. Kuubi tippudele ja servadele vastab joonisel 5.18, a) kujutatud planaarne graaf. Sellele graafile vastab joonisel 5.18, b) esitatud hulknurkne graaf, millel on samuti 6 tahku: viis tõkestatud tahku

$$(a, b, t, s, a), (b, t, u, c, b), (d, c, u, v, d),$$

$$(v, s, a, d, v), (a, b, c, d, a)$$

ja tsükliga (s, t, u, v, s) piiratud alast väljapoole jääv tasandi piirkond.



Joonis 5.18: Kuup kui hulknurkne graaf

Teoreem 5.41. Kui $\mathcal{G}$ on sidus hulknurkne graaf, milles on v tippu, e serva (kaart) ja f tahku, siis kehtib nn **Euleri valem**

$$f = e - v + 2. \quad (5.5)$$

Tõestus. Olgu $\mathcal{G}$ sidus hulknurkne graaf, milles on v tippu, e serva (kaart) ja f tahku. Hulknurkse graafi definitsiooni kohaselt peab $\mathcal{G}$ sisaldama vähemalt ühte lihttsükli. Seetõttu peab ilmselt tahkude arv olema vähemalt kaks, st $f \geq 2$. Teoreemi tõestame induktsiooniga tahkude arvu f järgi.

Olgu $f = 2$. Siis graafil $\mathcal{G}$ on kaks tahku. Üks neist on tõkestatud ning on piiratud mingi lihttsükliga $\tau = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ ja teine on sellest tahust väljapoole jääv tõkestamata tahk. On ilmne, et graafi $\mathcal{G}$ kõik kaared ja tipud esinevad tsüklis τ . Seega $e = k - 1$, $v = k - 1$, $e - v + 2 = 2 = f$ ja vaadeldaval juhul valem (5.5) kehtib.

Vaatleme nüüd juhtu $f > 2$ ning eeldame, et nende sidusate hulknurksete graafide jaoks, milles on vähem kui f tahku, valem (5.5)

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

Lk 144 / 247

Tagasi

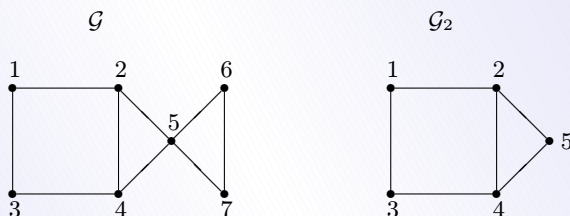
Täisekraan

Lahku failist

kehtib. Valime graafis $\mathcal{G}$ ühe tahkudest $\mathcal{G}_1 = (t_1, t_2, \dots, t_k)$, mis piirneb selle graafi tõkestamata tahuga. Kõrvaldame graafist $\mathcal{G}$ valitud tahu ja tähistame saadud hulknurkset tasandilist graafi $\mathcal{G}_2$. Tahku $\mathcal{G}_1$ saab valida nii, et graaf $\mathcal{G}_2$ on sidus (vt näiteks joonis 5.19, kus $\mathcal{G}_1 = (5, 6, 7, 5)$). Nii graaf $\mathcal{G}_1$ kui ka graaf $\mathcal{G}_2$ on sidusad hulknurksed graafid, millel on vähem kui f tahku. Induktsiooni eelduse kohaselt kehtivad võrdused

$$f_l = e_l - v_l + 2; \quad l = 1, 2, \quad (5.6)$$

kus f_l , e_l ja v_l on graafi $\mathcal{G}_l$ tahkude, servade ja tippude arvud.



Joonis 5.19: Tahu (5, 6, 7, 5) eemaldamine

Veendume, et graafide $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ ühised servad asuvad tsüklis $\mathcal{G}_1 = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ järjestikku (st moodustavad ahela). Oletame, et see pole nii. Siis võib üldsust kitsendamata eeldada, et leiduvad indeksid i ja j ($i < j < k$) nii, et tahu $\mathcal{G}_1$ kui tsükli servadest

$$(t_1, t_2), (t_2, t_3), \dots, (t_{i-1}, t_i), (t_j, t_{j+1})$$

on ühised graafidele $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ ning servad

$$(t_i, t_{i+1}), (t_{i+1}, t_{i+2}), \dots, (t_{j-1}, t_j)$$

ei asu graafil $\mathcal{G}_2$. Graafi $\mathcal{G}_2$ sidususe tõttu on tema tipud t_i ja t_j ühendatavad marsruudiga

$$(t_i, u_1), (u_1, u_2), \dots, (u_s, t_j).$$

Moodustame kinnise ahela

$$\alpha = (t_i, t_{i+1}, \dots, t_j, u_s, u_{s-1}, \dots, u_1, t_i)$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 145 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

graafis $\mathcal{G}$. Siis ahelas α sisaldub minimaalne lihttsükkel τ , mis sisaldab serva (t_i, t_{i+1}) . Tsükkel τ määrab tahu graafis $\mathcal{G}$, mis kuulub konstruktsiooni kohaselt ka graafile $\mathcal{G}_2$. See on aga vastuolus eeldusega, et serv (t_i, t_{i+1}) pole graafide $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ ühine serv. Saadud vastuolu näitabki, et graafide $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ ühised servad moodustavad ahela (muidugi võib selleks ahelaks olla triviaalne ahel, mis sisaldab 0 serva). Analoogilise arutlusega saab näidata, et graafide $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ ühisteks tippudeks on saadud ahelas esinevad tipud (kui saadud ahelas on 0 serva, siis on graafidel $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ ainult üks ühine tipp!).

Oletame, et graafidel $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ on m ühist serva. Kuna need ühised servad moodustavad ahela, millel asuvad ka nende graafide ühised tipud, siis on nendel graafidel $m + 1$ ühist tippu. See võimaldab arvutada graafi $\mathcal{G}$ jaoks arvud f , v ja e :

$$f = f_1 + f_2 - 1, \quad v = v_1 + v_2 - (m + 1), \quad e = e_1 + e_2 - m. \quad (5.7)$$

Seostest (5.6) ja (5.7) saame

$$\begin{aligned} e - v + 2 &= (e_1 + e_2 - m) - (v_1 + v_2 - m - 1) + 2 = \\ &= (e_1 - v_1 + 2) + (e_2 - v_2 + 2) - 1 = f_1 + f_2 - 1 = f. \end{aligned}$$

Seega kehtib teoreemi väide ka juhul $f > 2$ ning vastavalt induktsiooniprintsiibile iga $f \geq 2$ korral. $\square$

Teoreem 5.42. *Sidusas hulknurkses graafis $\mathcal{G}$ kehtivad võrratused*

$$3f \leq 2e, \quad (5.8)$$

$$e \leq 3v - 6, \quad (5.9)$$

kus f , v ja e tähistavad graafi $\mathcal{G}$ tahkude, tippude ja servade arvu.

Tõestus. Graafi $\mathcal{G}$ igal tahul on vähemalt kolm serva. Tähistagu n_r selliste tahkude arvu, milles on r serva, ja s olgu maksimaalne servade arv graafi $\mathcal{G}$ tahkudel. Kuna iga serv asub parajasti kahel tahul, siis

$$3n_3 + 4n_4 + \dots + sn_s = 2e. \quad (5.10)$$

Tahkude koguarv graafis $\mathcal{G}$ on

$$n_3 + n_4 + \dots + n_s = f. \quad (5.11)$$

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#) [▶▶](#)
[◀](#) [▶](#)

Lk 146 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Võrdustes (5.10) ja (5.11) järeldeb võrratus (5.8). Euleri võrduse ning võrratuse (5.8) põhjal

$$e = f + v - 2 \leq \frac{2}{3}e + v - 2, \quad \frac{1}{3}e \leq v - 2,$$

kust järeldebki võrratus (5.9). $\square$

Teoreem 5.43. *Olgu hulknurksel graafil k sidususe komponenti. Siis selle graafi tahkude arvu f , servade arvu e ja tippude arvu v jaoks kehtib*

$$v - e + f = 1 + k.$$

Tõestus. Olgu vaadeldava graafi sidususe komponendid $\mathcal{G}_1, \dots, \mathcal{G}_k$. Iga komponent $\mathcal{G}_i$ on sidus hulknurkne graaf, mille tahkude arv f_i , servade arv e_i ja tippude arv v_i rahuldavad Euleri valemit $f_i = e_i - v_i + 2$. Ilmselt

$$f = f_1 + \dots + f_k - (k - 1) = f_1 + \dots + f_k - k + 1,$$

$$e = e_1 + \dots + e_k, \quad v = v_1 + \dots + v_k.$$

Seega

$$\begin{aligned} v - e + f &= (v_1 - e_1 + f_1) + \dots + (v_k - e_k + f_k) - k + 1 = \\ &= 2 + \dots + 2 - k + 1 = 2k - k + 1 = k + 1. \quad \square \end{aligned}$$

5.11. Kuratowski teoreem

Käesolevas alajaotuses antakse tunnus otsustamaks, kas vaadeldav graaf on tasandiline. Selle tunnuse sõnastamiseks vajatakse mõningaid abimõisteid.

Definitsioon 5.44. Graafi nimetatakse **täielikuks graafiks**, kui tema iga kaks erinevat tippu on ühendatud kaarega. Täielikku graafi, milles on n tippu, tähistatakse K_n .

Joonisel 5.20 on kujutatud täielikud graafid K_2 , K_3 ja K_4 .

Autori koduleht

Tiitelleht

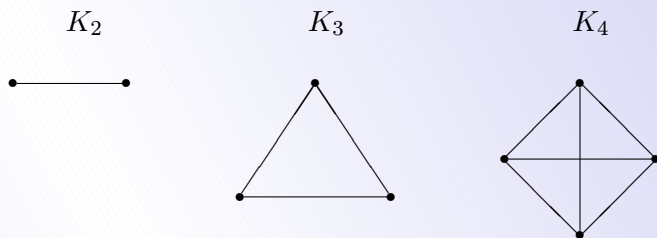


Lk 147 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Joonis 5.20: Graafid K_2 , K_3 ja K_4

Definitsioon 5.45. Graafi $\mathcal{G} = (T, K)$ nimetatakse **kahealuseli-seks graafiks** ehk **bigraafiks**, kui tema tippude hulk on jaotatav kaheks mittelõikuvaks mittetühjaks osaks T_1 ja T_2 nii, et selle graafi iga kaare üks otspunkt kuulub hulka T_1 ja teine otspunkt hulka T_2 . Bigraafi $\mathcal{G}$ nimetatakse **täielikuks**, kui ülaltoodud tippude hulga jaotuse korral iga $u \in T_1$ ja iga $v \in T_2$ korral on graafis $\mathcal{G}$ tippe u ja v ühendav kaar. Kui hulgas T_1 on m elementi ja hulgas T_2 on n elementi, siis vastavat täielikku bigraafi tähistatakse $K_{m,n}$.

Näide 5.46. Joonisel 5.2 on kujutatud täielik bigraaf $K_{3,3}$.

Definitsioon 5.47. Olgu graafis $\mathcal{G} = (T, K)$ fikseeritud kaar $(u, v) \in K$. Kui graafist $\mathcal{G}$ kõrvaldada kaar (u, v) , lisada uus tipp w ning uued kaared (u, w) ja (w, v) , siis öeldakse, et tekkinud uus graaf on saadud graafist $\mathcal{G}$ kaare (u, v) **dubleerimisega**. Graafe $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ nimetatakse **homöomorfseteks**, kui nad on isomorfsed või nad on saadavad ühest ja samast graafist $\mathcal{G}$ lõplik arv kordi kaarte dubleerimist kasutades.

Näide 5.48. Joonisel 5.21 kujutatud graafid $\mathcal{G}_2$ ja $\mathcal{G}_3$ on homöomorfsete, sest nad on saadud graafist $\mathcal{G}_1$ lõpliku arvu kaarte dubleerimise teel.

Teoreem 5.49 (Kuratowski teoreem). ²⁷ *Graaf on tasandiline parajasti siis, kui ta ei sisalda alamgraafi, mis on homöomorfne kas graafiga K_5 või graafiga $K_{3,3}$.*

Kuratowski teoreemi tõestus on üsna keeruline ja siinkohal jätame selle tõestuseta.

²⁷Kasimir Kuratowski (1896–1980) – poola matemaatik. Tõestas kirjeldatud teoreemi 1930.aastal.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

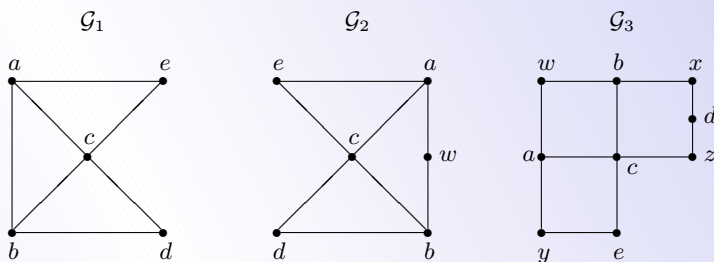
▶

Lk 148 / 247

Tagasi

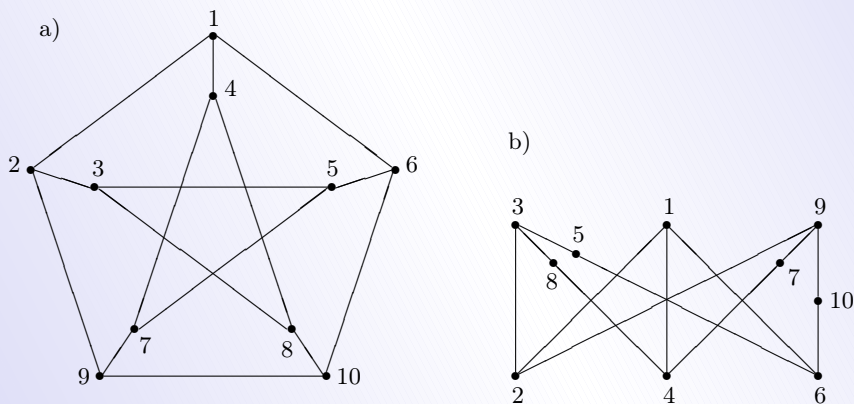
Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.21: Homöomorfseid graafid

Näide 5.50. Joonisel 5.22, a) on kujutatud nn **Peterseni**²⁸ graaf. Joonisel 5.22, b) on esitatud Peterseni graafi alamgraaf ning on näidatud, kuidas see saadakse kaarte dubleerimisega graafist $K_{3,3}$. Seega Peterseni graaf pole tasandiline.



Joonis 5.22: Peterseni graaf ja tema alamgraaf

5.12. Platoni kehad

Kolmemõõtmelises eukleidilises ruumis vaadeldakse kumeraid korrapäraseid hulktahukaid, st kumeraid kehasid, mis on piiratud tahkudega, milledeks on ühesugused korrapärased hulknurgad, ning mille iga tipu juures on ühe ja sama palju servi. Kumerate korrapäraste hulktahukate näideteks on tetraeder (vt joonis 5.23, a)) ja kuup (vt

²⁸Julius Peter Christian Petersen (1839-1910) – taani matemaatik.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

Lk 149 / 247

Tagasi

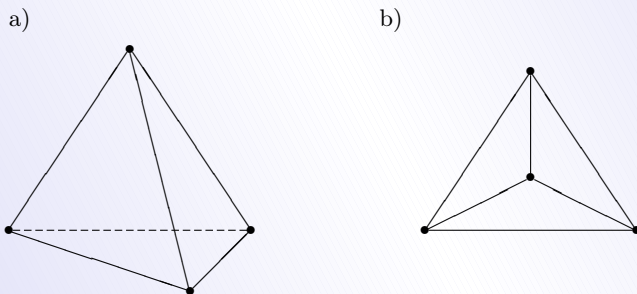
Täisekraan

Lahku failist

joonis 5.18, a)). Igale kumerale korrapärasele hulktahukale vastab hulknurkne graaf, mille tahkudele vastavad parajasti hulktahuka tahud ning servadele vastavad parajasti hulktahuka servad. Joonistel 5.18, b) ja 5.23, b) on toodud vastavalt kuubile ja tetraeedrile vastavad hulknurksed graafid. Kumeraid korrapäraseid hulktahukaid nimetatakse ka **Platoni kehadeks**²⁹.

Teeme kindlaks, millised Platoni kehad on võimalikud. Selleks uurime Platoni kehale vastavat hulknurkset graafi $\mathcal{G}$. Tähistame selle graafi tahkude, servade ja tippude arvu vastavalt f , e ja v . Servade arvu igal tahul tähistame m . Tahkude arv, millel asub antud tipp, olgu n . See arv võrdub ka tipust lähtuvate servade arvu. On ilmne, et $m, n \geq 3$. Kuna iga serv asub kahel tahul ja tahke on f , siis $2e = mf$. Liites tippudest lähtuvad servade arvud, saame tulemuseks nv . Saadud summasse on arvestatud iga serv kaks korda. Seega $nv = 2e$ ehk

$$mf = 2e = nv. \quad (5.12)$$



Joonis 5.23: Tetraeeder ja tema graaf

Euleri valemist ja võrdustest (5.12) saadakse

$$0 < 2 = v - e + f = \frac{2e}{n} - e + \frac{2e}{m} = e \cdot \frac{2m - mn + 2n}{mn}.$$

Kuna $e, m, n > 0$, siis

$$2m - mn + 2n > 0, \quad mn - 2m - 2n < 0,$$

²⁹Platon (428 või 427 - 348 või 347) – kreeka filosoof, filosoofilise idealismi rajaja.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 150 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$mn - 2m - 2n + 4 < 4, \quad (m - 2)(n - 2) < 4$$

ja

$$(m - 2)(n - 2) \leq 3. \quad (5.13)$$

Et $m, n \geq 3$, siis $m - 2 \geq 1$, $n - 2 \geq 1$ ning võrratuses (5.13) on järgmised võimalused:

$$1^0 \quad m - 2 = 1, \quad n - 2 = 1; \quad m = 3, \quad n = 3;$$

$$2^0 \quad m - 2 = 2, \quad n - 2 = 1; \quad m = 4, \quad n = 3;$$

$$3^0 \quad m - 2 = 1, \quad n - 2 = 2; \quad m = 3, \quad n = 4;$$

$$4^0 \quad m - 2 = 3, \quad n - 2 = 1; \quad m = 5, \quad n = 3;$$

$$5^0 \quad m - 2 = 1, \quad n - 2 = 3; \quad m = 3, \quad n = 5.$$

Seega on võimalikud 5 erinevat tüüpi Platoni kehasid. Juhtudele 1^0 – 5^0 vastavad Platoni kehad on aga teada. Need on:

1^0 – tetraeder (korrapärane nelitahukas);

2^0 – heksaeeder ehk kuup (korrapärane kuustahukas);

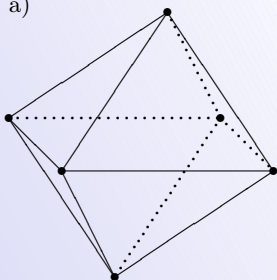
3^0 – oktaeder (korrapärane kaheksatahukas);

4^0 – dodekaeder (korrapärane kaksteisttahukas);

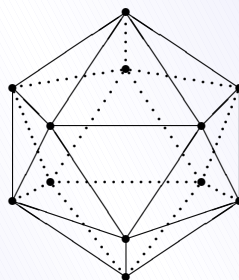
5^0 – ikosaeeder (korrapärane kakskümmendtahukas).

Dodekaeder ja temale vastav graaf on esitatud joonisel 5.13. Oktaeder ja ikosaeeder on kujutatud joonistel 5.24, a) ja 5.24, b), nendele vastavad graafid aga joonistel 5.25, a) ja 5.25, b).

a)



b)



Joonis 5.24: Oktaeder ja ikosaeeder

Autori koduleht

Tiitelleht

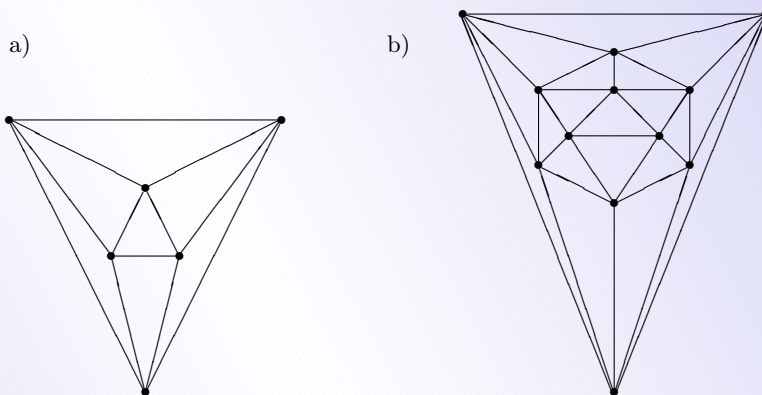


Lk 151 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.25: Oktaeedrile ja ikosaeedrile vastavad graafid

5.13. Graafide värvimine

Vaatleme graafi $\mathcal{G} = (T, K)$. Graafi (tippude) **värvimiseks** nimetatakse tema igale tipule mingi värvi omistamist, kusjuures iga kaare $(u, v) \in K$ korral tippudele u ja v omistatud värvid on erinevad. Vähimat värvide arvu, mis vajatakse graafi $\mathcal{G}$ värvimiseks, nimetatakse graafi $\mathcal{G}$ **kromaatiliseks arvuks** ja seda tähistatakse $\chi(\mathcal{G})$.

Näide 5.51. Täieliku graafi K_n kromaatiline arv on n .

Näide 5.52. Peterseni graafi kromaatiline arv on 3 (vt joonis 5.22, a)). Tipud 1-10 võib värvida näiteks järgmiselt: 1, 3, 7, 10 – punased, 2, 4, 6 – valged, 5, 8, 9 – mustad.

Graafi kromaatilise arvu leidmine kuulub graafiteooria raskemate ülesannete kilda. Vaatleme järgnevalt ühte kõige populaarsemat graafide värvimisega seotud ülesannet.

Kujutlegem, et meie kasutuses on mingi piirkonna administratiivse jaotuse kaart, näiteks mingi riikide rühma kaart. Eeldatakse, et riigid koosnevad ühest osast. Nõutakse riikide värvimist kaardil nii, et kui kahe riigi piiridel on ühine osa, siis need riigid värvitakse eri-

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 152 / 247

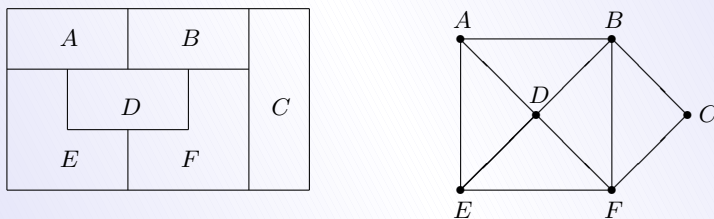
Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

nevat värvi (kui selleks ühiseks osaks on punkt, siis on ühine värv lubatud). Püstitatud ülesande saab sõnastada graafi värvimise ülesandena järgmiselt. Moodustagem graaf, mille tippudeks on riigid ja kaks tippu on ühendatud kaarega parajasti siis, kui nendele vastavate riikide piirid omavad ühisosa (mis pole punkt). Saadud graaf on tasandiline. Riikide värvimine kaardil on samaväärne sellele kaardile vastava graafi värvimisega. Vähim värvide arv, mida vajatakse kaardi värvimiseks, võrdub sellele kaardile vastava tasandilise graafi kromaatilise arvuga.

Näide 5.53. Joonisel 5.26 on kujutatud kaart riikidega A, B, C, D, E ja F ning sellele kaardile vastav graaf. Antud kaart on värvitav kolme värviga, näiteks: A, F – punased, B, E – valged, C, D – mustad.



Joonis 5.26: Kaart ja temale vastav graaf

Ülalkirjeldatud kaartide värvimise ülesande püstitas esimesena Francis Guthrie (1831-1899), kes näitas 1850.a. paiku, kuidas värvida Inglismaa maakondade kaarti nii, et selleks kasutada ainult nelja värvi. Ühtlasi püstitas ta probleemi: kas ülalkirjeldatud maakaardi-ülesanne on lahendatav mistahes kaardi korral ainult nelja värviga. Seda probleemi nimetatakse **neljavärviprobleemiks**. Neljavärviprobleemi lahendamisega on tegelenud aegade jooksul mitmed kuulsad matemaatikud. Lõplikult lahendati see probleem jaatavalt alles 1976.aastal ameerika matemaatikute Kenneth Appel'i ja Wolfgang Haken'i poolt. Nemad kasutasid probleemi lahendamiseks vajalike variantide läbivaatamiseks arvutite abi. Appel ja Haken tõestasid järgmise teoreemi.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

Lk 153 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Teoreem 5.54 (Neljavärviteoreem). Kui $\mathcal{G}$ on tasandiline graaf, siis $\chi(\mathcal{G}) \leq 4$.

Teoreemi tõestust me siinkohal ei esita tema keerukuse tõttu.

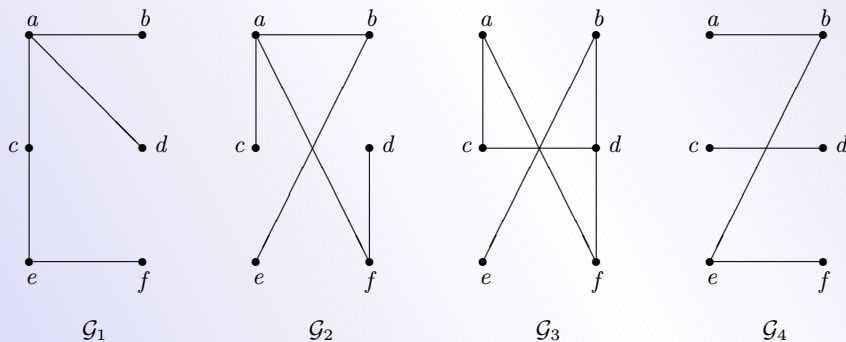
5.14. Puu

Järgnevalt vaatleme ühte sageli esinevat graafi eriliiki.

Definitsioon 5.55. Sidusat graafi $\mathcal{G}$ nimetatakse **puuks**, kui ta ei sisalda lihttsükleid. Graafi $\mathcal{G}$ nimetatakse **metsaks**, kui ta ei sisalda lihttsükleid.

Mets ei pea olema sidus graaf. Puu definitsioonist tuleneb, et ta ei saa sisaldada kordseid kaari ja sõlmi. Metsa iga sidus komponent on puu.

Näide 5.56. Joonisel 5.27 esitatud graafidest on puud $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$. Graaf $\mathcal{G}_3$ pole puu, sest ta sisaldab lihttsükli (a, f, d, c, a) . Graaf $\mathcal{G}_4$ pole puu, sest ta pole sidus. Küll on aga graaf $\mathcal{G}_4$ mets.



Joonis 5.27: $\mathcal{G}_1$ ja $\mathcal{G}_2$ on puud, $\mathcal{G}_3$ ja $\mathcal{G}_4$ pole puud

Teoreem 5.57. Graaf on puu parajasti siis, kui tema iga kahe erineva tipu u ja v korral leidub parajasti üks lihtahel tipust u tippu v .

Tõestus. Oletame, et vaadeldav graaf on puu. Näitame, et selle graafi erinevate tippude u ja v vahel leidub ainult üks lihtahel. Kuna puu on sidus, siis leidub tippe u ja v ühendav marsruut $\mu =$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 154 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$(u_1, u_2, \dots, u_k)$, kus $u = u_1$, $v = u_k$. Kui $u_i = u_j$ ($i < j$), siis ka marsruut $(u_1, \dots, u_i, u_{j+1}, \dots, u_k)$ ühendab tippe u ja v . Seega võib eeldada, et tipud $u_1, \dots, u_k$ marsruudis μ on erinevad. Siis ei saa seal esineda ka korduvaid kaari, st μ on lihtahel. Oletame, et leidub veel ahelast μ erinev lihtahel $\tau = (v_1, \dots, v_s)$, mis ühendab tippe u ja v ($u = v_1$, $v = v_s$). Siis leidub selline indeks p , et $u_1 = v_1, \dots, u_p = v_p$, $u_{p+1} \neq v_{p+1}$ ($p < k, s$). Valides jadades $u_{p+1}, u_{p+2}, \dots, u_k$ ja $v_{p+1}, v_{p+2}, \dots, v_s$ vähimad indeksid r ja q nii, et $u_r = v_q$ (sellised indeksid leiduvad, sest $u_k = v_s = v$), saadakse vaadeldavas graafis lihttsükkel $(u_p, u_{p+1}, \dots, u_1 = v_q, v_{q-1}, \dots, v_p = u_p)$. See aga on vastuolus puu definitsiooniga. Saadud vastuolu näitab, et puus iga kaks erinevat tippu on ühendatavad ainult ühe lihtahelaga.

Oletame nüüd, et vaadeldavas graafis iga kaks erinevat tippu on ühendatavad parajasti ühe lihtahelaga. Siis see graaf on ilmselt sidus ja ta ei saa sisaldada lihttsükke. Tõepoolest, kui $(u_1, u_2, \dots, u_k)$ oleks lihttsükkel, st $k > 1$ ja $u_k = u_1$, siis tipud u_1 ja u_{k-1} on erinevad ning nad oleksid ühendatavad kahe erineva lihtahelaga (u_1, u_{k-1}) ja $(u_1, u_2, \dots, u_{k-1})$. Järelikult on vaadeldavaks graafiks puu. $\square$

Kui puus $\mathcal{G} = (T, K)$ fikseerida mingi tipp $u \in T$, siis saab sellest puust moodustada orienteeritud graafi $\mathcal{G}^* = (T, K^*)$ järgmiselt. Valides mis tahes tipu $v \in T$, $v \neq u$, leidub lihtahel $u = u_1, u_2, \dots, u_k = v$ tipust u tippu v . Siis kaared (u_i, u_{i+1}) ; $i = 1, 2, \dots, k-1$, loetakse kuuluvaks graafi $\mathcal{G}^*$ kaarte hulka K^* :

$$K^* = \{ (s, t) \mid \text{leidub } v \in T \text{ ja lihtahel } u = u_1, u_2, \dots, u_k = v \text{ nii,}$$

$$\text{et } s = u_i \text{ ja } t = u_{i+1} \text{ mingi } i = 1, 2, \dots, k-1 \text{ korral} \}.$$

Lihtne on veenduda, et kui $(v, w) \in K^*$, siis $(w, v) \notin K^*$ (vastasel juhul leiduks graafis $\mathcal{G}$ lihttsükke). Tippu u nimetatakse orienteeritud graafi $\mathcal{G}^*$ **juureks** ja graafi $\mathcal{G}^*$ **juurega puuks**. Kui $(v, w) \in K^*$, siis tippu v nimetatakse tipu w **eellaseks** (ehk **isaks**) ja tippu w omakorda tipu $v \in T^*$ **järglaseks** (ehk **pojaks**). Järglasteta tippe nimetatakse selle puu **lehtedeks**. Puu **sügavuseks** (ehk **kõrguseks**) nimetatakse pikima tee pikkust juurest leheni.

Autori koduleht

Tiitelleht



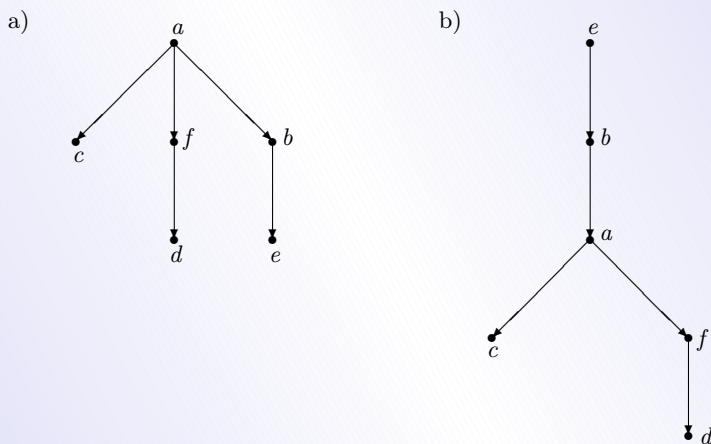
Lk 155 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 5.58. Kui joonisel 5.27 kujutatud puus $\mathcal{G}_2$ valida juureks tipp a , siis tekib joonisel 5.28, a) kujutatud juurega puu. Kui aga juureks valida tipp e , tekib joonisel 5.28, b) kujutatud juurega puu. Edaspidi jäetakse juurega puu joonistel kaare orienteeritust näitav nool ära, sest orienteerituse määrab üheselt ära juba juure u valik. Juur u aga kujutatakse joonisel kõige kõrgema tipuna. Joonisel 5.28, a) kujutatud juurega puul: sügavus on 2; tipu a järglased on c, f, b ; tipud c, d ja e on lehed; tipu f eellaseks on a ja järglaseks on d ; tipu b eellaseks on a ja järglaseks on e .



Joonis 5.28: Puude näiteid

Teoreem 5.59. Kui puus on n tippu ($n > 1$), siis sel puul on $n - 1$ serva.

Tõestus. Olgu $\mathcal{G} = (T, K)$ puu. Valime juureks mingi tipu u ja moodustame vastava juurega puu $\mathcal{G}^* = (T^*, K^*)$. Siis $T = T^*$ ja kaarte hulk K^* koosneb hulka K kuuluvatest kaartest, mis on vastavalt orienteeritud. Seejuures puu definitsiooni ja teoreemi 5.57 kohaselt iga tipp $v \in T^* \setminus \{u\}$ on ühe kaare $(w, v) \in K^*$ lõpp-punktiks. See määrab üksühese vastavuse hulkade $T^* \setminus \{u\}$ ja K^* vahel. Kuna tippude arv graafides $\mathcal{G}$ ja $\mathcal{G}^*$ on n , siis saadud üksühese vastavuse tõttu on kaarte arv nendes graafides $n - 1$. $\square$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 156 / 247

Tagasi

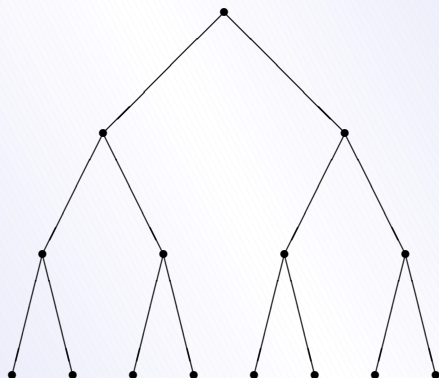
Täisekraan

Lahku failist

Mõnede sageli esinevate juurtega puude klasside jaoks on kasutusele võetud erinimetused.

Definitsioon 5.60. Juurega puud, mille igal tipul on ülimalt kaks järglast, nimetatakse **kahendpuuks** ehk **binaarseks puuks**. Kui puu igal tipul, mis pole leht, on m järglast, siis seda puud nimetatakse **m -aarseks puuks**. Puud, millel kõik lihtahelad juurest leheni on ühe ja sama pikkusega, nimetatakse **täielikuks puuks**.

Näide 5.61. Joonistel 5.28, a) ja b) kujutatud juurtega puud on vastavalt 3-aarne puu ja binaarne puu. Need puud pole täielikud. Joonisel 5.29 on kujutatud täielik binaarne puu sügavusega kolm.



Joonis 5.29: Täielik binaarne puu sügavusega 3

5.15. Puude rakendusi

Puudena võib kujutada mitmeid erinevates valdkondades esinevaid süsteeme. Toome siinkohal kolm lihtsat näidet.

Näide 5.62. Vaadeldes suurt organisatsiooni, võib seda kujutada juurega puuna. Puu tippudeks on positsioonid selles organisatsioonis. Puu juureks on vaadeldava organisatsiooni juht, juure järglasteks on juhi vahetud alluvad, nende järglasteks omakorda nende vahetud alluvad jne..

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

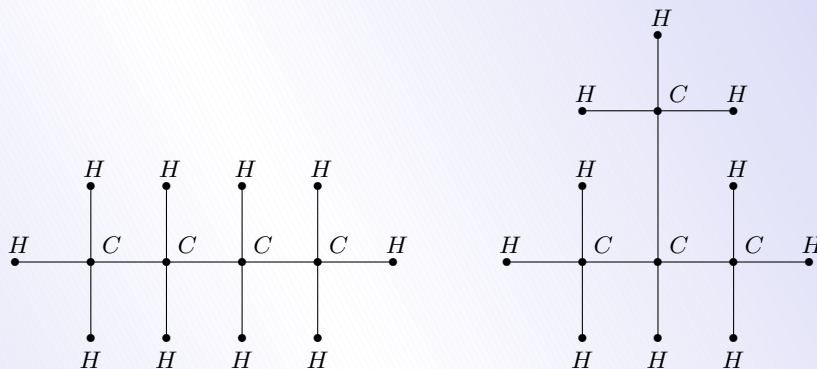
Lk 157 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 5.63. Keemiliste ühendite ehitust kujutatakse puudena. Joonisel 5.30 on kujutatud butaani C_4H_{10} kaks isomeeri puudena (H – vesinik, C – süsinik).



Joonis 5.30: Butaani kaks isomeeri

Näide 5.64. Arvutite failisüsteem (kataloog) kujutab endast juurega puud.

Juurega puid kasutatakse sageli ka mitmesuguse informatsiooni säilitamiseks (puu igas tipus asuvad mingid andmed). Sellisel juhul tekib vajadus puu kõigi tippude "külastami seks". Selleks tuleb vaadelda juurega puu tipud mingi põhimõtte kohaselt täielikult järjestada. Saadud järjestus näitab tippude läbimise järjekorda kõigi tippude külastamiseks. On mitmeid algoritme juurega puu tippude järjestamiseks. Kirjeldame järgnevalt ühte neist.

Vaadelgem juurega puud $\mathcal{G}$, mille juureks on tipp u . Märgendame algul puu $\mathcal{G}$ tipud. Juure u märgendame sümboliga 0. Olgu juurel k järglast. Märgendame need sümbolitega

$$0.1, 0.2, \dots, 0.k.$$

Kui tipul $0.i$ on j järglast, siis märgendame need sümbolitega

$$0.i.1, 0.i.2, \dots, 0.i.j.$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 158 / 247

Tagasi

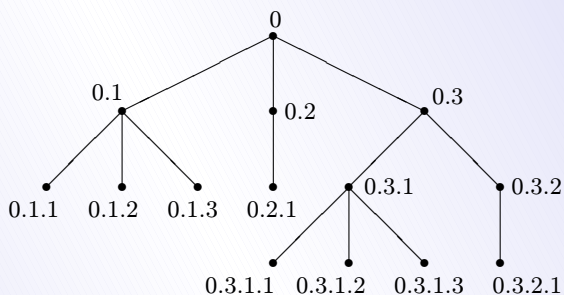
Täisekraan

Lahku failist

Nii jätkatakse induktiivselt: kui tipul $0.i_1.i_2 \cdots .i_t$ on s järglast, siis märgendatakse need sümbolitega

$$0.i_1.i_2 \cdots .i_t.1, 0.i_1.i_2 \cdots .i_t.2, \dots, 0.i_1.i_2 \cdots .i_t.s.$$

Näide 5.65. Joonisel 5.31 on näidatud ühe konkreetse juurega puu tippude märgendamine ülalkirjeldatud viisil.



Joonis 5.31: Tippude märgendamine

Saadud märgendite abil on võimalik järjestada juurega puu $\mathcal{G}$ tipud järgmiselt: kui $x_1.x_2 \cdots .x_n$ ning $y_1.y_2 \cdots .y_m$ on tipud, siis

$$x_1.x_2 \cdots .x_n < y_1.y_2 \cdots .y_m$$

parajasti siis, kui eksisteerib selline indeks i , et

$$x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_{i-1} = y_{i-1}, x_i < y_i$$

või

$$n < m \text{ ja } x_1 = y_1, x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n.$$

Sellist järjestust nimetatakse **leksikograafiliseks järjestuseks**.

Näide 5.66. Joonisel 5.31 kujutatud juurega puu tippude järjestus on järgmine:

$$0 < 0.1 < 0.1.1 < 0.1.2 < 0.1.3 < 0.2 < 0.2.1 < 0.3 < \\ < 0.3.1 < 0.3.1.1 < 0.3.1.2 < 0.3.1.3 < 0.3.2 < 0.3.2.1.$$

Ühena paljudest puude rakendustest esitame järgnevas alajaotuses sidusa graafi *katva puu* leidmise ülesande.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 159 / 247

Tagasi

Täisekraan

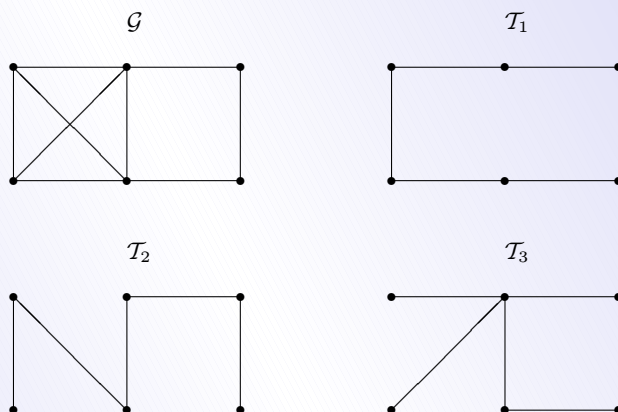
Lahku failist

5.16. Kattev puu

Vaatleme sidusat graafi.

Definitsioon 5.67. Sidusa graafi $\mathcal{G}$ **katvaks puuks** nimetatakse puud $\mathcal{T}$, mille tippudeks on graafi $\mathcal{G}$ kõik tipud.

Joonisel 5.32 on kujutatud sidus graaf $\mathcal{G}$ ja tema kolm katvat puud $\mathcal{T}_1$, $\mathcal{T}_2$ ja $\mathcal{T}_3$.



Joonis 5.32: Graaf $\mathcal{G}$ ja tema kolm katvat puud

Algoritm sidusa graafi $\mathcal{G} = (T, K)$ katva puu $\mathcal{T} = (T_0, K_0)$ leidmiseks.

Puu $\mathcal{T}$ leitakse järk-järgult. Algoritmi alustades valitakse $T_0 = \emptyset$, $K_0 = \emptyset$. Et algoritmi töö käigus ei pöördutaks tagasi juba puusse lülitatud tipu juurde, omistatakse ajutiselt igale tipule v nn tase-number $L(v)$. Algoritmi sammud on järgmised:

- (1) valida mis tahes tipp $v_0 \in T$ ja võtta $T_0 = \{v_0\}$, $L(v_0) = 0$;
- (2) iga tipp $v \in T \setminus T_0$, mis on tipu v_0 kaastipp, lisada hulka T_0 ja kaarte hulka K_0 lisada kaar (v_0, v) ning võtta $L(v) = 1$;
- (3) valida $i = 1$;
- (4) valida tipp $v_j \in T_0$, mille korral $L(v_j) = i$;
- (5) valida tipu v_j kaastipp $v \in T \setminus T_0$ (st $(v, v_j) \in K$), lisada see hulka T_0 ning hulka K_0 lisada kaar (v, v_j) ja võtta $L(v) = i + 1$;

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

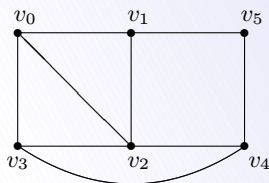
Lk 160 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- (6) korrata sammu (5) seni, kuni kõik hulga $T \setminus T_0$ elemendid on läbi vaadatud (NB! Hulk $T \setminus T_0$ selle kordamise käigus pidevalt muutub.);
 (7) korrata samme (4)–(6) seni, kuni kõik elemendid v_j omadusega $L(v_j) = i$ on läbi vaadatud;
 (8) võtta $i := i + 1$;
 (9) korrata samme (4)–(8) seni, kuni saadakse $T_0 = T$.



Joonis 5.33: Näite 5.68 graaf

Näide 5.68. Leiame äsja kirjeldatud algoritmi abil joonisel 5.33 kujutatud sidusa graafi katva puu. Algselt $T_0 = \emptyset$, $K_0 = \emptyset$. Rakendame algoritmi sammude kaupa.

- (1) Valime $v_0 \in T$, $T_0 = \{v_0\}$, $L(v_0) = 0$.
 (2) Tipu v_0 kaastipud on v_1, v_2, v_3 , mistõttu

$$T_0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3\}, \quad K_0 = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3)\},$$

$$L(v_1) = L(v_2) = L(v_3) = 1.$$

- (3) $i = 1$.
 (4) Valime tipuks v_j , mille korral $L(v_j) = i = 1$, tipu v_1 : $v_j = v_1$.
 (5) Valime tipu $v_j = v_1$ kaastipu $v \in T \setminus T_0$: $v = v_5$. Edasi:

$$T_0 = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_5\}, \quad L(v_5) = 2,$$

$$K_0 = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_1, v_5)\}.$$

- (6) Tipul $v_j = v_1$ ei ole kaastippe hulgas $T \setminus T_0 = \{v_4\}$.
 (7) Kordame samme (4)–(6) tippude $v_j = v_2$ ja $v_j = v_3$ jaoks:
 (4) $v_j = v_2$; (5) v_2 kaastipp hulgast $T \setminus T_0 = \{v_4\}$ on v_4 , mistõttu

$$T_0 = T = \{v_0, v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}, \quad L(v_4) = 2,$$

Autori koduleht

Täitelleht



Lk 161 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$K_0 = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_4)\}.$$

(4) $v_j = v_2$; (5) see samm pole teostatav, sest $T \setminus T_0 = \emptyset$.

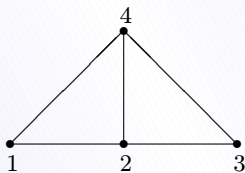
(8) $i := i + 1 = 2$.

(9) Kuna $T = T_0$, siis samme (4)–(8) korrata pole vaja ja algoritm lõpetab töö, st antud graafi katva puu $\mathcal{T} = (T_0, K_0)$ kaarte hulk on

$$K_0 = \{(v_0, v_1), (v_0, v_2), (v_0, v_3), (v_1, v_5), (v_2, v_4)\}.$$

Teoreem 5.69 (Kirchoff'i³⁰ valem). Olgu $\mathcal{G}$ sidus graaf n tipuga $1, 2, \dots, n$ ja kaassusmaatriksiga A . Olgu D diagonaalmaatriks, mille diagonaalil asuvad tippude astmed $\delta(1), \delta(2), \dots, \delta(n)$. Siis graafi $\mathcal{G}$ erinevate katvate puude arv võrdub maatriksi $D - A$ mis tahes elemendi algebralise täiendiga.

Meenutame, et ruutmaatriksi $B = \|b_{ij}\|$ elemendi b_{kl} **algebraliselt täiendiks** nimetatakse arvu $(-1)^{k+l} M_{kl}$, kus M_{kl} on determinant, mis tekib maatriksi B determinandist k -nda rea ja l -nda veeru eemaldamisel.



Joonis 5.34: Näite 5.70 graaf

Näide 5.70. Leiame joonisel 5.34 kujutatud graafi katvate puude arvu. Selle graafi intsidentsusmaatriks on

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

ja tippude astmed on

$$\delta(1) = 2, \delta(2) = 3, \delta(3) = 2, \delta(4) = 3.$$

³⁰Gustav Robert Kirchhoff (1824–1887) - saksa matemaatik ja füüsik.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 162 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

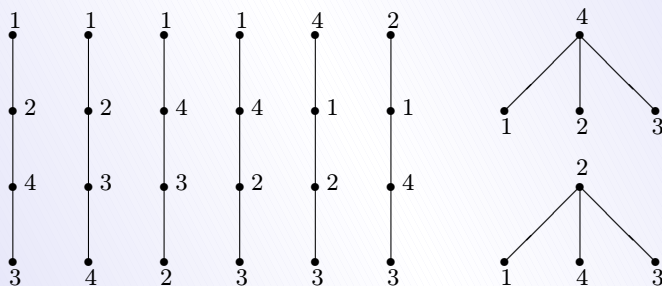
Seega

$$D - A = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Saadud maatriksi esimese rea esimese veeru elemendi alamdeterminant on

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 8.$$

Seega on vaadeldaval graafil 8 erinevat katvat puud. Need katvad puud on kujutatud joonisel 5.35.



Joonis 5.35: Näite 5.70 graafi katvad puud

Vaadeldagem sidusat graafi $\mathcal{G} = (T, K)$, mille igale kaarele (u, v) on vastavusse pandud reaalarv $l(u, v) \in \mathbb{R}$ - kaare (u, v) **kaal**. Selle graafi **katva puu** $\mathcal{T}$ **kaaluks** nimetatakse selle puu kõigi kaarte kaalude summat. **Minimaalseks katvaks puuks** nimetatakse vähima kaaluga puud. Tüüpiline ülesanne graafiteoorias on: leida antud sidusa graafi jaoks minimaalne kattev puu. Esitame siinkohal kaks algoritmi minimaalse katva puu leidmiseks.

1.algoritm:

(1) Järjestada graafi $\mathcal{G}$ servad kaalude kahanemise järjekorras.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 163 / 247

Tagasi

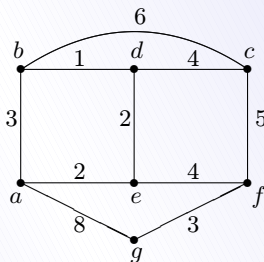
Täisekraan

Lahku failist

(2) Tekkinud jadast hakata järjest kustutama servi selliselt, et säiluks järelejäänud graafi sidusus. Toimida seni, kuni jääb järgi $n - 1$ serva.

2.algoritm (Krushkal'i algoritm):

- (1) Järjestada graafi $\mathcal{G}$ servad kaalude kasvamise järjekorras.
- (2) Hakata graafi $\mathcal{G}$ tippe järjest ühendama saadud jada servadega. Kui mingi serv tekitaks tsükli, siis jätta see serv vaatlusest välja ja minna jada järgmise serva juurde.



Joonis 5.36: Näite 5.71 graaf

Näide 5.71. Leiame joonisel 5.36 kujutatud graafi $\mathcal{G}$ minimaalse katva puu. Kasutame selleks 1.algoritmi. Järjestades graafi $\mathcal{G}$ servad nende kaalude kahanevuse järjekorras, saadakse

$$(a, g), (b, c), (c, f), (c, d), (e, f),$$

$$(a, b), (f, g), (a, e), (d, e), (b, d).$$

Kolme esimese serva kõrvaldamisel tekkiv graaf $\mathcal{G}_1$ koosneb servadest

$$(c, d), (e, f), (a, b), (f, g), (a, e), (d, e), (b, d)$$

ja on sidus. Siit esimest serva (c, d) kõrvaldada ei saa, sest siis jääb järgi mittesidus graaf. Samuti pole võimalik eemaldada teist serva (e, f) . Kolmanda serva eemaldamisel tekib aga sidus graaf servadega

$$(c, d), (e, f), (f, g), (a, e), (d, e), (b, d).$$

See graaf on juba puu ja järelikult on ta esialgse graafi minimaalne kattev puu.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 164 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5.17. Lühima tee ülesanne

Vaatleme orienteeritud graafi $\mathcal{D} = (T, K)$. Sageli seostatakse graafiga $\mathcal{D}$ kujutus $l : K \longrightarrow \mathbb{R}$, mis igale kaarele $(u, v) \in K$ paneb vastavusse mingi reaalarvu $l(u, v) \in \mathbb{R}$. Sellist kujutust l nimetatakse **kaalufunktsiooniks**. Arvu $l(u, v)$ nimetatakse kaare (u, v) **pikkuseks**. Olenevalt ülesandest, mille tulemusena vaadeldav graaf tekkis, võib kaare (u, v) pikkus $l(u, v)$ tähendada ühendustee pikkust, selle läbimise aega või maksumust jne..

Definitsioon 5.72. Olgu antud tee $\tau = (t_1, \dots, t_k)$ tipust $u = t_1$ tippu $v = t_k$. **Tee τ pikkuseks** nimetatakse arvu ³¹

$$l(\tau) = \sum_{i=1}^{k-1} l(t_i, t_{i+1}).$$

Kaalufunktsiooniga orienteeritud graafide korral on tüüpiline järgmine ülesanne: leida vähima (või suurima) pikkusega tee tipust u tippu v . Selline ülesanne sõnastati ka alajaotuses 5.2. Lahendame näitena seal püstitatud ülesande.

Näide 5.73. Vaatleme joonisel 5.5 kujutatud orienteeritud graafi tippudega 1, 2, ..., 10. Iga kaare (i, j) kohale on kirjutatud vastav kaalufunktsiooni väärtus $l(i, j)$:

$$l(1, 2) = 3, \quad l(1, 3) = 2, \quad \dots, \quad l(5, 7) = 3, \quad \dots, \quad l(9, 10) = 8.$$

Leiame lühima pikkusega tee tipust 1 tippu 10.

Mis tahes tippu i jaoks tähistagu $\lambda(i)$ lühima pikkusega tee pikkust tipust 1 tippu i . Meil on vaja leida arv $\lambda(10)$. Arvu $\lambda(10)$ leidmiseks arutleme järgmiselt. Tippu 10 suubuvad kaared tippudest 7, 8 ja 9. Lühim tee tipu 7 kaudu tipust 1 tippu 10 on pikkusega $\lambda(7) + l(7, 10)$. Lühim tee tipu 8 kaudu tipust 1 tippu 10 on pikkusega $\lambda(8) + l(8, 10)$. Lühim tee tipu 9 kaudu tipust 1 tippu 10 on pikkusega $\lambda(9) + l(9, 10)$.

³¹See definitsioon erineb alajaotuses 5.6 antud tee pikkusest $d(\tau)$. Pikkus $d(\tau)$ saadakse käesolevast definitsioonist, kui kaalufunktsiooniks valida $l : K \longrightarrow \mathbb{R}$, $l(u, v) = 1$ iga $(u, v) \in K$ korral.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 165 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

On selge, et lühima tee pikkus $\lambda(10)$ tipust 1 tippu 10 on vähim kolmest saadud arvust:

$$\begin{aligned}\lambda(10) &= \min \{ \lambda(7) + l(7, 10); \lambda(8) + l(8, 10); \lambda(9) + l(9, 10) \} = \\ &= \min \{ \lambda(7) + 7; \lambda(8) + 7; \lambda(9) + 8 \}.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Analoogilise arutlusega saadakse võrduses (5.14) esinevad suurused $\lambda(7)$, $\lambda(8)$ ja $\lambda(9)$:

$$\begin{aligned}\lambda(7) &= \min \{ \lambda(4) + l(4, 7); \lambda(5) + l(5, 7) \} = \\ &= \min \{ \lambda(4) + 6; \lambda(5) + 3 \},\end{aligned}\quad (5.15)$$

$$\lambda(8) = \lambda(5) + l(5, 8) = \lambda(5) + 5,\quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}\lambda(9) &= \min \{ \lambda(5) + l(5, 9); \lambda(6) + l(6, 9) \} = \\ &= \min \{ \lambda(5) + 6; \lambda(6) + 8 \}.\end{aligned}\quad (5.17)$$

Samuti leitakse võrdustes (5.15)–(5.17) esinevad arvud $\lambda(4)$, $\lambda(5)$ ja $\lambda(6)$:

$$\lambda(4) = \lambda(2) + l(2, 4) = \lambda(2) + 7,\quad (5.18)$$

$$\begin{aligned}\lambda(5) &= \min \{ \lambda(2) + l(2, 5); \lambda(3) + l(3, 5) \} = \\ &= \min \{ \lambda(2) + 6; \lambda(3) + 8 \}.\end{aligned}\quad (5.19)$$

$$\lambda(6) = \lambda(3) + l(3, 6) = \lambda(3) + 9.\quad (5.20)$$

Arvud $\lambda(2)$ ja $\lambda(3)$ on saadavad vahetult: $\lambda(2) = 3$, $\lambda(3) = 2$. Järgnevalt tuleb võrduste (5.14)–(5.20) abil järjest arvutada $\lambda(4)$, $\lambda(5), \dots, \lambda(10)$:

$$\lambda(4) = \lambda(2) + 7 = 3 + 7 = 10,$$

$$\lambda(5) = \min \{ 3 + 6; 2 + 8 \} = 9,$$

$$\lambda(6) = 2 + 9 = 11,$$

$$\lambda(7) = \min \{ 10 + 6; 9 + 3 \} = 12,$$

$$\lambda(8) = 9 + 5 = 14,$$

$$\lambda(9) = \min \{ 9 + 6; 11 + 8 \} = 15,$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 166 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\lambda(10) = \min \{ 12 + 7; 14 + 7; 15 + 8 \} = 19.$$

Lühima tee pikkus tipust 1 tippu 10 on seega 19. Kuna

$$\lambda(10) = 19 = \lambda(7) + 7 = \lambda(5) + 3 + 7 = \lambda(2) + 6 + 3 + 7,$$

siis lühim tee tipust 1 tippu 10 on 1, 2, 5, 7, 10.

Analoogiliste arutlustega saab leida pikimat teed orienteeritud graafi ühest tipust teise tippu.

Näide 5.74. Leiame joonisel 5.5 kujutatud graafis pikima tee tipust 1 tippu 10. Mis tahes tipu i jaoks tähistagu $\lambda(i)$ suurima pikkusega tee pikkust tipust 1 tippu i . Arvutuskäik on:

$$\lambda(10) = \max \{ \lambda(7) + l(7, 10); \lambda(8) + l(8, 10);$$

$$\lambda(9) + l(9, 10) \} = \max \{ \lambda(7) + 7; \lambda(8) + 7; \lambda(9) + 8 \},$$

$$\lambda(9) = \max \{ \lambda(5) + l(5, 9); \lambda(6) + l(6, 9) \} =$$

$$= \max \{ \lambda(5) + 6; \lambda(6) + 8 \},$$

$$\lambda(8) = \lambda(5) + l(5, 8) = \lambda(5) + 5,$$

$$\lambda(7) = \max \{ \lambda(4) + l(4, 7); \lambda(5) + l(5, 7) \} =$$

$$= \max \{ \lambda(4) + 6; \lambda(5) + 3 \},$$

$$\lambda(6) = \lambda(3) + l(3, 6) = \lambda(3) + 9,$$

$$\lambda(5) = \max \{ \lambda(2) + l(2, 5); \lambda(3) + l(3, 5) \} =$$

$$= \max \{ \lambda(2) + 6; \lambda(3) + 8 \},$$

$$\lambda(4) = \lambda(2) + l(2, 4) = \lambda(2) + 7, \quad \lambda(3) = 2, \quad \lambda(2) = 3,$$

$$\lambda(4) = \lambda(2) + 7 = 3 + 7 = 10, \quad \lambda(5) = \max \{ 3 + 6; 2 + 8 \} = 10,$$

$$\lambda(6) = \lambda(3) + 9 = 2 + 9 = 11,$$

$$\lambda(7) = \max \{ 10 + 6; 10 + 3 \} = 16,$$

$$\lambda(8) = \lambda(5) + 5 = 10 + 5 = 15,$$

$$\lambda(9) = \max \{ 10 + 6; 11 + 8 \} = 19,$$

$$\lambda(10) = \max \{ 16 + 7; 15 + 7; 19 + 8 \} = 27 =$$

$$= \lambda(9) + 8 = \lambda(6) + 8 + 8 = \lambda(3) + 9 + 8 + 8 = 2 + 9 + 8 + 8.$$

Pikim tee tipust 1 tippu 10 on 1, 3, 6, 9, 10 ja selle tee pikkus on 27.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 167 / 247

Tagasi

Täisekraan

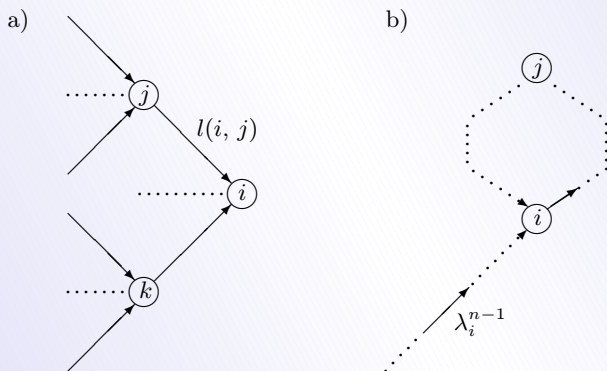
Lahku failist

Analoogiliste arutlustega leitakse ka üldjuhul lühim tee orienteeritud graafi ühest tipust teise tippu. Olgu antud orienteeritud graaf kaalufunktsiooniga l :

$$\mathcal{D} = (T, K), \quad T = \{1, 2, \dots, n\}, \quad n \geq 2, \quad l : K \longrightarrow \mathbb{R}. \quad (5.21)$$

Defineerigem ka $i, j \in T$, $(i, j) \notin K$, puhul kaalu $l(i, j) = \infty$. Nimetagem ainult käesolevas alajaotuses teed, mille kaarte arv ei ületa arvu k , lühiduse mõttes **k -teeks** (see erineb alajaotuses 5.6 antud k -tee definitsioonist). Meid huvitavad lühimad teed ja nende pikkused tipust 1 tippu i . Tähistagu $\lambda_i^{(k)}$ tipust 1 tippu i viivate k -teede hulgas vähima pikkusega tee pikkust, $k = 1, 2, \dots$. Kui tipust 1 ei leidu ühtegi k -teed tippu i , siis defineerigem $\lambda_i^{(k)} = \infty$. Kui aga lugeda iga tippu $u \in T$ teeks pikkusega 0 tipust u tippu u , siis võib määrata ka suurused $\lambda_i^{(k)}$ juhu $k = 0$ jaoks:

$$\lambda_1^{(0)} = 0, \quad \lambda_i^{(0)} = \infty, \quad i = 2, \dots, n.$$



Joonis 5.37: Selgitavad joonised teoreemidele 5.75 ja 5.76

Tehtud eeldustel kehtib

Teoreem 5.75.

$$\lambda_i^{(k+1)} = \min_{1 \leq j \leq n} \{ \lambda_j^{(k)} + l(j, i) \}, \quad i = 2, \dots, n,$$

$$\lambda_1^{(k+1)} = \min \{ 0; \min_{1 \leq j \leq n} \{ \lambda_j^{(k)} + l(j, 1) \} \}.$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 168 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Teoreemi 5.75 detailset tõestust me ei esita. Märgime vaid, et teoreemi väide järeldeb mõttekäigust (vt joonis 5.37, a)): iga $(k+1)$ -tee tipust 1 tippu i koosneb k -teest tipuni j ja viimasest kaarest (j, i) ; lühim $(k+1)$ -tee tipust 1 tippu i tipu j kaudu on pikkusega $\lambda_j^{(k)} + l(j, i)$; saadud arvudest $\lambda_j^{(k)} + l(j, i)$, $(j, i) \in K$, vähim annabki lühima $(k+1)$ -tee pikkuse tipust 1 tippu i . Arvud $\lambda_i^{(k)}$ leitakse rekurrentselt, leides need algul $k = 0$ korral, siis $k = 1$ korral jne..

Kui graafis (5.21) pole negatiivse pikkusega lihttsükleid, siis saab arvude $\lambda_i^{(k)}$ abil alati leida lühima tee ja selle pikkuse tipust 1 tippu i . Kui graafis leidub negatiivse pikkusega lihttsükleid, siis võib teest, mis sisaldab seda tsüklit, saada tsüklit korduvalt läbides uue tee, mille pikkus on väiksem mis tahes etteantud arvust.

Teoreem 5.76. *Leidugu orienteeritud graafi (5.21) tipust 1 tee igasse tippu i , $i = 2, \dots, n$. Siis graafis (5.21) ei leidu negatiivse pikkusega lihttsükleid parajasti siis, kui*

$$\lambda_i^{(n-1)} = \lambda_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (5.22)$$

Tõestus. Oletame, et on täidetud võrdused (5.22). Veendume, et graafis $\mathcal{D}$ pole negatiivse pikkusega lihttsükleid. Vastuväiteliselt eeldame, et graafis $\mathcal{D}$ leidub negatiivse pikkusega l_0 lihttsükkel, milles on r kaart. Läbigu see tsükkel tippu i . Siis

$$\lambda_i^{(n-1+kr)} \leq \lambda_i^{(n-1)} + kl_0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (5.23)$$

(vt joonis 5.37, b)). Võrdustest (5.22) järeldeb teoreemi 5.75 põhjal, et

$$\lambda_i^{(k)} = \lambda_i^{(n-1)}, \quad k \geq n-1 \quad (5.24)$$

(ka $i = 1$ korral). Tingimustest (5.23) ja (5.24) järeldeb $l_0 < 0$ tõttu vastuolu. On näidatud, et võrduste (5.22) täidetuse korral puuduvad graafis $\mathcal{D}$ negatiivse pikkusega lihttsükklid.

Vastupidi, oletame, et graafis $\mathcal{D}$ puuduvad negatiivse pikkusega lihttsükklid. Näitame, et on täidetud võrdused (5.22). Kui $i = 1$, siis tehtud eelduse põhjal ilmselt $\lambda_1^{(n-1)} = \lambda_1^{(n)} = 0$. Oletame, et

$$\lambda_i^{(n-1)} \neq \lambda_i^{(n)} \quad \text{mingi } i \in \{2, \dots, n\} \quad \text{korral.} \quad (5.25)$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 169 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

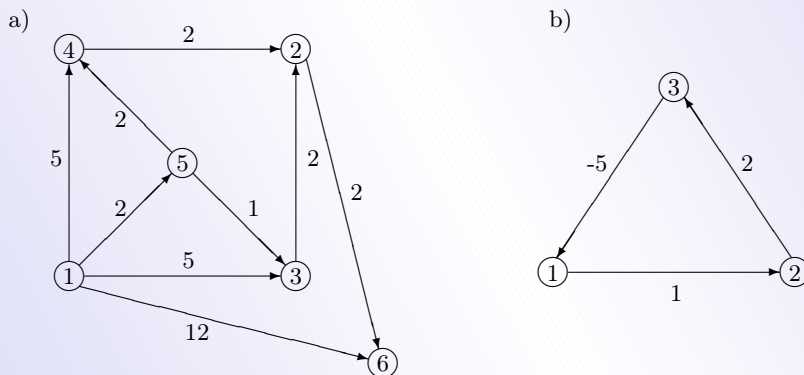
Siis peab leiduma n kaarega tee $\tau = (j_1, \dots, j_n)$ tipust 1 tippu i pikkusega $\lambda_i^{(n)}$ ($j_1 = 1, j_n = i$). Tee τ peab sisaldama korduvaid tippe, st tee τ sisaldab lihttsükli $\tau_0 = (j_s, j_{s+1}, \dots, j_t)$ ($t > s, j_t = j_s$). Jättes teest τ välja tsükli τ_0 , saadakse $(n-1)$ -tee $\tau_1 = (j_1, \dots, j_s, j_{t+1}, \dots, j_n)$ tipust 1 tippu i . Seejuures

$$\lambda_i^{(n)} = l(\tau) = l(\tau_0) + l(\tau_1), \quad l(\tau_1) \geq \lambda_i^{(n-1)}.$$

Eelduse tõttu $l(\tau_0) \geq 0$. Seetõttu

$$\lambda_i^{(n)} \geq l(\tau_1) \geq \lambda_i^{(n-1)}.$$

Suuruste $\lambda_i^{(k)}$ definitsiooni põhjal $\lambda_i^{(n)} \leq \lambda_i^{(n-1)}$. Järelikult $\lambda_i^{(n)} = \lambda_i^{(n-1)}$. Näitasime, et tingimus (5.25) ei saa kehtida. Ühtlasi on näidatud võrduste (5.22) kehtivus. $\square$



Joonis 5.38: Näidetes 5.77 ja 5.78 esinevad graafid

Näide 5.77. Leiame joonisel 5.38, a) kujutatud graafi jaoks vähima pikkusega tee tipust 1 tippu 6, kasutades arve $\lambda_i^{(k)}$. Esitame arvud $l(i, j)$ ja $\lambda_i^{(k)}$ tabelina kujul

	...	j	...	...	k	...
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$	
i	...	$l(i, j)$	...	...	$\lambda_i^{(k)}$	...
$\vdots$		$\vdots$			$\vdots$	

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

Lk 170 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Arvud $l(i, j)$ saame kohe panna tabelisse, arvud $\lambda_i^{(k)}$ tuleb aga järk-järgult arvutada.

	1	2	3	4	5	6	0	1	2	3	4	5
1	∞	∞	5	5	2	12	0	0	0	0	0	0
2	∞	∞	∞	∞	∞	2	∞	∞	7	5	5	5
3	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞	5	3	3	3	3
4	∞	2	∞	∞	∞	∞	∞	5	4	4	4	4
5	∞	∞	1	2	∞	∞	∞	2	2	2	2	2
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	12	12	9	7	7

Leiame siinkohal näitena mõned arvud $\lambda_i^{(k)}$ (ülejäänud tuleb lugeda ise leida):

$$\lambda_1^{(1)} = \min \{0; \min \{0 + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty\}\} = 0,$$

$$\lambda_2^{(1)} = \min \{0 + \infty, \infty + \infty, \infty + 2, \infty + 2, \infty + \infty, \infty + \infty\} = \infty,$$

$$\lambda_3^{(1)} = \min \{0 + 5, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 1, \infty + \infty\} = 5,$$

$$\lambda_4^{(1)} = \min \{0 + 5, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + 2, \infty + \infty\} = 5,$$

$$\lambda_5^{(1)} = \min \{0 + 2, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty\} = 2,$$

$$\lambda_6^{(1)} = \min \{0 + 12, \infty + 2, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty, \infty + \infty\} = 12.$$

Kuna kaalufunktsiooni väärtused on selles graafis kõik positiivsed, siis minimaalsed teed ei saa sisaldada üle viie kaare ja $\lambda_i^{(k)} = \lambda_i^{(n-1)}$ iga $k \geq n - 1$ ja i korral. Lühima tee pikkus tipust 1 tippu 6 on seega $\lambda_6^{(5)} = 7$. Selleks, et leida lühim tee, mille pikkus on 6, tuleb teoreemis 5.75 esitatud seoste abil määrata kindlaks indeksid, mille korral vastavad miinimumid saavutatakse:

$$7 = \lambda_6^{(5)} = \min_{1 \leq j \leq 6} \{ \lambda_j^{(4)} + l(j, 6) \} = \min \{0 + 12, 5 + 2,$$

$$3 + \infty, 4 + \infty, 2 + \infty, 7 + \infty\} = \lambda_2^{(4)} + 2,$$

$$\lambda_2^{(4)} = 5 = \min_{1 \leq j \leq 6} \{ \lambda_j^{(3)} + l(j, 2) \} = \min \{0 + \infty, 5 + \infty,$$

$$3 + 2, 4 + 2, 2 + \infty, 9 + \infty\} = \lambda_3^{(3)} + 2,$$

$$\lambda_3^{(3)} = 3 = \min_{1 \leq j \leq 6} \{ \lambda_j^{(2)} + l(j, 3) \} = \min \{0 + 5, 7 + \infty,$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 171 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$3 + \infty, 4 + \infty, 2 + 1, 12 + \infty \} = \lambda_5^{(2)} + 1,$$

$$\lambda_5^{(2)} = 2 = \min_{1 \leq j \leq 6} \{ \lambda_j^{(1)} + l(j, 5) \} = \min \{ 0 + 2, \infty + \infty,$$

$$5 + \infty, 5 + \infty, 2 + \infty, 12 + \infty \} = \lambda_1^{(1)} + 2.$$

Seega miinimumid saavutatakse indeksi j järgmiste väärtuste korral (vt lõpust ettepoole): 1, 5, 3, 2. Järelikult lühim tee tipust 1 tippu 6 on 1, 5, 3, 2, 6.

Näide 5.78. Leiame joonisel 5.38, a) kujutatud graafi jaoks vähima pikkusega 3-tee (st tee, mis ei sisalda üle kolme kaare) tipust 1 tippu 6. Kasutame eelmises näites saadud tabeli andmeid. Lühim 3-tee tipust 1 tippu 6 on $\lambda_6^{(3)} = 9$. Vähim indeks k , mille korral $\lambda_6^{(k)} = \lambda_6^{(3)}$, on 3. Seega selle vähima tee saavutamiseks vajataksegi kolme kaart. Leiame selle vähima tee, leides jälle, milliste indeksite korral saavutatakse $\lambda_i^{(k)}$ väärtuste arvutamisel miinimumid:

$$\lambda_6^{(3)} = 9 = \min_{1 \leq j \leq 6} \{ \lambda_j^{(2)} + l(j, 6) \} = \min \{ 0 + 12, 7 + 2,$$

$$3 + \infty, 4 + \infty, 2 + \infty, 12 + \infty \} = \lambda_2^{(2)} + 2,$$

$$\lambda_2^{(2)} = 7 = \min_{1 \leq j \leq 6} \{ \lambda_j^{(1)} + l(j, 2) \} = \min \{ 0 + \infty, \infty + \infty,$$

$$5 + 2, 5 + 2, 2 + \infty, 12 + \infty \} = \lambda_3^{(1)} + 2 = \lambda_4^{(1)} + 2.$$

Järelikult on kaks lühimat 3-teed tipust 1 tippu 6: 1, 3, 2, 6 ja 1, 4, 2, 6.

5.18. Vahendite jaotamine tootmise laiendamiseks

Järgnevalt püstitame majandusülesande, mida saab lahendada kui sobivalt sõnastatud pikima tee ülesannet.

Olgu vaatluse all n ettevõtet. Nende vahel on vaja jaotada c rahaühikut tootmise laiendamiseks nii, et eeldatav ettevõtete toodangu summaarne juurdekasv oleks suurim. Teada peavad olema funktsioonid $g_1(x), \dots, g_n(x)$, kus $g_i(x)$ tähistab i -nda ettevõtte toodangu eeldatavat juurdekasvu, kui sellele eraldataks c rahaühikut x rahaühikut. Funktsioonide $g_i(x)$ väärtused tehakse kindlaks empiiriliselt.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 172 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

Tekib planeerimisülesanne: leida arvud $x_1, \dots, x_n$, mis rahuldavad tingimusi

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = c,$$

$$x_1, \dots, x_n \geq 0$$

ja annavad funktsioonile

$$z = g(x_1) + g_2(x_2) + \dots + g_n(x_n)$$

suurima väärtuse.

Tavaliselt ei jaotata raha ühe krooni täpsusega, vaid antakse näiteks täpsusega 100, 1000, ... Seepärast antakse ka funktsioonide $g_i(x)$ väärtused ette diskreetselt, kus argumenti x väärtused muutuvad teatud konstantse intervalli võrra. Demonstreerime püstitatud ülesande lahendamist konkreetse näite varal.

Näide 5.79. Nelja ettevõtte vahel on vaja jaotada 75 rahaühikut tootmise laiendamiseks nii, et ettevõtete toodangute eeldatav summaarne juurdekasv oleks suurim. Teada on funktsioonide $g_1(x), \dots, g_4(x)$ väärtused argumentide väärtustel 0, 15, 30, 45, 60, 75. Need on esitatud tabelis:

x	0	15	30	45	60	75
$g_1(x)$	0	16	30	42	60	70
$g_2(x)$	0	12	24	36	50	72
$g_3(x)$	0	11	29	40	63	70
$g_4(x)$	0	13	38	43	60	75

Siin on seega eeldatud, et x_1, x_2, x_3 ja x_4 võivad omada väärtusi hulgast

$$M = \{0, 15, 30, 45, 60, 75\},$$

kusjuures lubatavad on ainult need väärtused, mille korral

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 75.$$

Igale lubatavale muutujate x_1, x_2, x_3 ja x_4 valikule vastab nn lubatav tee tipust A tippu B joonisel 5.39 kujutatud graafis. Selle graafi tipudeks on väikesed ringikesed, mis asuvad x_1 -teljel, $(x_1 + x_2)$ -teljel ja

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)

[Lk 173 / 247](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

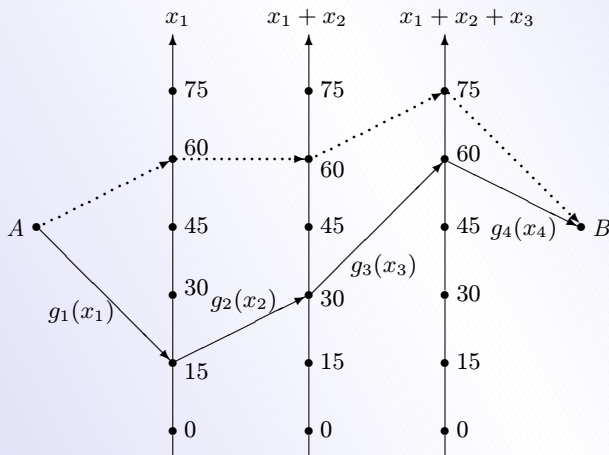
$(x_1 + x_2 + x_3)$ -teljel ning lisaks on veel tipud A ja B . Joonisel on kujutatud kaks lubatavat teed: tee $A, 15, 30, 60, B$ korral (kaared pideva joonega) $x_1 = 15, x_2 = 15, x_3 = 30, x_4 = 15$ ja tee $A, 60, 60, 75, B$ korral (kaared katkendliku joonega) $x_1 = 60, x_2 = 0, x_3 = 15, x_4 = 0$. Analoogiliselt saab kanda joonisele kõik lubatavad teed. Antud graafi kaarteks on lubatavaid teid moodustavad kaared. Kõiki kaari pole joonisele kantud. Kaarte pikkusteks on arvud $g_1(x_1), g_2(x_2), g_3(x_3), g_4(x_4)$ (vt joonist 5.39). Lubatava tee

$$\tau = (A, x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, B)$$

pikkuseks on summa

$$z = g_1(x_1) + g_2(x_2) + g_3(x_3) + g_4(x_4),$$

s.o. ettevõtete toodangu oodatav summaarne juurdekasv. Meil tuleb leida pikim lubatav tee tipust A tippu B . Asume leidma pikima lubatava tee pikkust.



Joonis 5.39: Vahendite jaotamine tootmise laiendamiseks

Tähistagu $f_i(x)$ suurimat eeldatavat toodangu juurdekasvu, mida on oodata i esimeselt ettevõttelt, kui neile eraldada kokku x rahaühikut ($i = 1, 2, 3, 4$) ehk teisiti: $f_i(x)$ on pikima tee pikkus vaadeldava graafi tipust A tippu $x_1 + \dots + x_i$. Peame leidma $f_4(75)$.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 174 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tippu B viivad teed läbivad $(x_1 + x_2 + x_3)$ -teljel asuvaid tippe $0, \dots, 75$. Pikim tee tippu B läbi $(x_1 + x_2 + x_3)$ -telje tipu x on ilmselt pikkusega $f_3(x) + g_4(75 - x)$. Pikim tee tipust A tippu B on seega pikkusega

$$f_4(75) = \max_{x \in M} \{ f_3(x) + g_4(75 - x) \}.$$

Analoogiliselt saadakse

$$f_3(y) = \max_{x \in M} \{ f_2(x) + g_3(y - x) \},$$

$$f_2(y) = \max_{x \in M} \{ f_1(x) + g_2(y - x) \}.$$

Funktsioon f_1 aga langeb kokku funktsiooniga g_1 .

Leiame funktsioonide f_1 , f_2 ja f_3 väärtused kõigil argumentide väärtustel:

$$f_1(x) = g_1(x),$$

x	0	15	30	45	60	75
$f_1(x)$	0	16	30	42	60	70

$$f_2(y) = \max_{x \in M} \{ f_1(x) + g_2(y - x) \},$$

$$f_2(0) = \max \{ f_1(x) + g_2(0 - x) \} = f_1(0) + g_2(0) = 0,$$

$$f_2(15) = \max \{ f_1(x) + g_2(15 - x) \} = \max \{ f_1(0) + g_2(15),$$

$$f_1(15) + g_2(0) \} = \max \{ 0 + 12, 16 + 0 \} = 16,$$

$$f_2(30) = \max \{ f_1(x) + g_2(30 - x) \} = \max \{ f_1(0) + g_2(30),$$

$$f_1(15) + g_2(15), f_1(30) + g_2(0), \} =$$

$$= \max \{ 0 + 24, 16 + 12, 30 + 0 \} = 30,$$

$$f_2(45) = \max \{ f_1(x) + g_2(45 - x) \} = \max \{ 0 + 36, 16 + 24,$$

$$30 + 12, 42 + 0 \} = 42,$$

$$f_2(60) = \max \{ f_1(x) + g_2(60 - x) \} = \max \{ 0 + 50, 16 + 36,$$

$$30 + 24, 42 + 12, 60 + 0 \} = 60,$$

$$f_2(75) = \max \{ f_1(x) + g_2(75 - x) \} = \max \{ 0 + 72, 16 + 50,$$

$$30 + 36, 42 + 24, 60 + 12, 70 + 0 \} = 72,$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 175 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

x	0	15	30	45	60	75
$f_2(x)$	0	16	30	42	60	72

$$f_3(y) = \max_{x \in M} \{ f_2(x) + g_3(y - x) \},$$

$$f_3(0) = \max \{ f_2(x) + g_3(0 - x) \} = f_2(0) + g_3(0) = 0,$$

$$f_3(15) = \max \{ f_2(x) + g_3(15 - x) \} =$$

$$= \max \{ 0 + 11, 16 + 0 \} = 16,$$

$$f_3(30) = \max \{ f_2(x) + g_3(30 - x) \} = \max \{ 0 + 29, 16 + 11,$$

$$30 + 0 \} = 30,$$

$$f_3(45) = \max \{ f_2(x) + g_3(45 - x) \} = \max \{ 0 + 40, 16 + 29,$$

$$30 + 11, 42 + 0 \} = 45,$$

$$f_3(60) = \max \{ f_2(x) + g_3(60 - x) \} = \max \{ 0 + 63, 16 + 40,$$

$$30 + 29, 42 + 11, 60 + 0 \} = 63,$$

$$f_3(75) = \max \{ f_2(x) + g_3(75 - x) \} = \max \{ 0 + 70, 16 + 63,$$

$$30 + 40, 42 + 29, 60 + 11, 72 + 0 \} = 79,$$

x	0	15	30	45	60	75
$f_3(x)$	0	16	30	45	63	79

$$f_4(75) = \max_{x \in M} \{ f_3(x) + g_4(75 - x) \} = \max \{ 0 + 75, 16 + 60,$$

$$30 + 43, 45 + 38, 63 + 13, 79 + 0 \} = 83.$$

Tipust A tippu B viiva pikima tee pikkus z on seega 83. Et leida ka arvude $x_1, \dots, x_4$ väärtused pikima tee korral, tuleb leitud andmete põhjal teha kindlaks maksimaalse väärtuse andnud argumentide väärtused:

$$f_4(75) = 83 = f_3(45) + g_4(30) = f_2(15) + g_3(30) + g_4(30) =$$

$$= f_1(15) + g_2(0) + g_3(30) + g_4(30) =$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 176 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$= g_1(15) + g_2(0) + g_3(30) + g_4(30).$$

Maksimaalne tee pikkus saavutatakse seega siis, kui $x_1 = 15$, $x_2 = 0$, $x_3 = 30$, $x_4 = 30$.

Vastus: Ettevõtete vahel tuleb suurima eeldatava toodangu juurdekasvu saavutamiseks jaotada 75 rahaühikut järgmiselt: esimesele ettevõttele anda 15 rahaühikut, teisele ettevõttele 0 rahaühikut, kolmandale ettevõttele ja neljandale ettevõttele kummalegi 30 rahaühikut. Siis toodangu oodatav summaarne juurdekasv on 83 rahaühikut.

5.19. Maksimaalne voog võrgus

Kaupade transportimisel ühest asustatud punktist teise tekib vajadus valida sobivalt marsruut. Probleem on eriti aktuaalne siis, kui asulad asuvad teineteisest kaugel ja leidub erinevaid marsruute nende vahel. Sõltuvalt teede- ja raudteevõrgust, võivad ühendusvõrgu läbilaskevõimed olla erinevad. Analoogiline olukord võib tekkida ka näiteks vedelaine transportimisel torusüsteemi kaudu ühest kohast teise. Nii ongi jõutud järgnevalt käsitletava võrgu ja voo mõisteni.

Järgnevalt vaadeldakse orienteeritud graafi $\mathcal{D} = (T, K)$ tippude hulgaga $T = \{u_1, \dots, u_n\}$. Siin on iga kaare $(u, v) \in K$ korral tähtis tippude u ja v järjekord: u on kaare (u, v) **algustipp** ja v on **lõpptipp**.

Definitsioon 5.80. Orienteeritud graafi $\mathcal{D} = (T, K)$ nimetatakse **võrguks**, kui ta rahuldab järgmisi tingimusi:

1^0 leidub parajasti üks tipp $u \in T$ nii, et u pole graafi $\mathcal{D}$ ühegi kaare lõpptipp;

2^0 leidub parajasti üks tipp $v \in T$ nii, et v pole graafi $\mathcal{D}$ ühegi kaare algustipp;

3^0 igale kaarele $(u, v) \in K$ on vastavusse pandud arv $c(u, v) \geq 0$, mida nimetatakse kaare (u, v) **läbilaskevõimeks**.

Võrk on määratud graafiga $\mathcal{D}$ ja kujutusega c . Seetõttu tähistame võrku paarina $(\mathcal{D}, c)$. Võrgu definitsioonis tingimusega 1^0 määratud tippu u nimetatakse vaadeldava võrgu **alguspunktiks** ja tingimusega 2^0 määratud tippu nimetatakse vaadeldava võrgu **lõpp-punktiks**.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 177 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

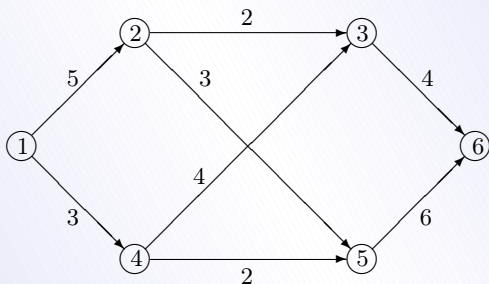
Kõiki ülejäänud tippe nimetatakse **vahepealseteks tippudeks**. Kaare (u, v) läbilaskevõime $c(u, v)$ kirjutatakse graafi $\mathcal{D}$ geomeetrilisel kujutamisel selle kaare kohale. Joonisel 5.40 on kujutatud võrk alguspunktiga 1 ja lõpp-punktiga 6.

Definitsioon 5.81. Vooks võrgus $(\mathcal{D}, c)$ nimetatakse kujutust $\varphi : K \rightarrow \mathbb{R}$, mis igale kaarele $(u, v) \in K$ paneb vastavusse reaalarvu $\varphi(u, v)$ nii, et on täidetud tingimused:

1^o $0 \leq \varphi(u, v) \leq c(u, v)$ iga $(u, v) \in K$ korral;

2^o iga vahepealse tipu v korral kehtib võrdus

$$\sum_{(u,v) \in K} \varphi(u, v) = \sum_{(v,w) \in K} \varphi(v, w). \quad (5.26)$$



Joomis 5.40: Võrgu näide

Kui võrgus $(\mathcal{D}, c)$ on antud voog φ , siis iga kaarega (u, v) on seotud arvud $c(u, v)$ ja $\varphi(u, v)$. Graafi $\mathcal{D}$ geomeetrilisel kujutamisel kirjutatakse need arvupaarina $(c(u, v), \varphi(u, v))$ kaare (u, v) juures. Joonisel 5.41, a) on kujutatud võrk koos temal antud vooga. Ühel ja samal võrgul võib vaadelda erinevaid vooge. Joonistel 5.41, a) ja 5.41, b) on kujutatud näitena üks ja sama võrk kahe erineva vooga.

Teoreem 5.82. Kui φ on voog võrgus $(\mathcal{D}, c)$, mille alguspunkt on u_1 ja lõpp-punkt on u_n , siis

$$\sum_{(u_1, u) \in K} \varphi(u_1, u) = \sum_{(v, u_n) \in K} \varphi(v, u_n). \quad (5.27)$$

Autori koduleht

Tiitelleht

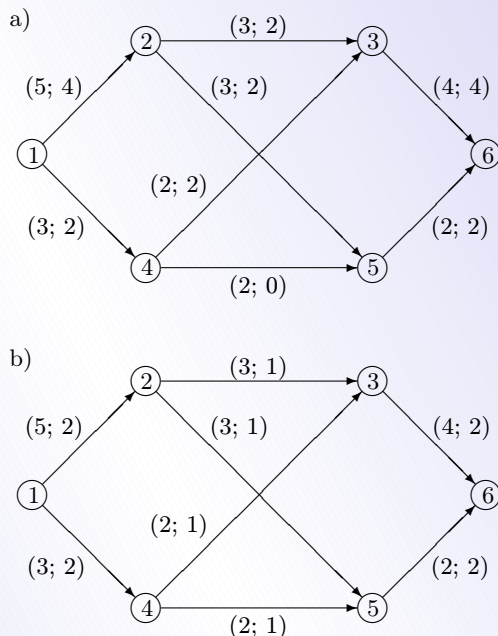


Lk 178 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.41: Erinevad vood võrgus

Teoreemi 5.82 tõestus. Kui $(u_1, u_n) \in K$, siis võrduse (5.27) mõlemad pooled sisaldavad liidetavat $\varphi(u_1, u_n)$. Seepärast võib üldsust kitsendamata eeldada, et $(u_1, u_n) \notin K$. Sellisel juhul $n > 2$ ja $T \setminus \{u_1, u_n\} \neq \emptyset$. Võrdusest (5.26) järeldub

$$\sum_{u \in T \setminus \{u_1, u_n\}} \left(\sum_{(v, u) \in K} \varphi(v, u) - \sum_{(u, w) \in K} \varphi(u, w) \right) = 0. \quad (5.28)$$

Summas (5.28) esinevad liidetavad $\varphi(s, t)$ graafi $\mathcal{D}$ iga kaare (s, t) jaoks: a) iga kaare $(u_1, u) \in K$ jaoks on üks liidetav $\varphi(u_1, u)$; b) iga kaare $(v, u_n) \in K$ jaoks on üks liidetav $-\varphi(v, u_n)$; c) iga kaare $(u, v) \in K$, $u, v \notin \{u_1, u_n\}$ jaoks on kaks liidetavat $\varphi(u, v)$ ja $-\varphi(u, v)$, mis omavahel liites annavad nulli. Seega võtab summa (5.28) kuju

$$\sum_{(u_1, u) \in K} \varphi(u_1, u) - \sum_{(v, u_n) \in K} \varphi(v, u_n) = 0,$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 179 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

mis on samaväärne võrdusega (5.27). $\square$

Definitsioon 5.83. Voo φ suuruseks nimetatakse arvu

$$\bar{\varphi} = \sum_{(u_1, u) \in K} \varphi(u_1, u),$$

kus u_1 on võrgu alguspunkt.

Iga võrgu $(\mathcal{D}, c)$ korral on põhiülesandeks leida maksimaalse suurusega voog φ selles võrgus. Käesoleva alajaotuse järgneva osa pühendamegi maksimaalse voo leidmise ülesande lahendamisele.

Olgu φ voog võrgus $(\mathcal{D}, c)$. Kaart (u, v) nimetatakse **küllastatuks**, kui voog $\varphi(u, v)$ läbi selle kaare (u, v) võrdub selle kaare läbilaskevõimega $c(u, v)$. Voogu φ nimetatakse **küllastatuks**, kui iga tee võrgu alguspunktist u_1 võrgu lõpp-punkti u_n sisaldab küllastatud kaart. On ilmne, et iga maksimaalne voog on küllastatud voog. Vastupidine väide ei kehti. Küll aga võib küllastatud voogu mingis mõttes lugeda lähendiks maksimaalsele voole. Seepärast kirjeldame algoritmi küllastatud voo leidmiseks võrgus $(\mathcal{D}, c)$.

Algoritm küllastatud voo leidmiseks võrgus $(\mathcal{D}, c)$.

1.samm. Defineerime $\varphi(u, v) = 0$ iga kaare $(u, v) \in K$ jaoks (st alustame nullvoost) ja valime orienteeritud graafi $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}$.

2.samm. Kõrvaldame orienteeritud graafist $\mathcal{D}^*$ kõik võrgu $\mathcal{D}$ voo φ suhtes küllastatud kaared. Saadud orienteeritud graafi tähistame jälle sümboliga $\mathcal{D}^*$.

3.samm. Valime graafis $\mathcal{D}^*$ mingi lihtahela τ alguspunktist u_1 lõpp-punktini u_n . Kui sellist ahelat τ ei leidu, siis φ ongi otsitav küllastatud voog ja algoritmi töö on lõppenud. Vastasel juhul asume täitma algoritmi järgmist sammu.

4.samm. Suurendame voogu $\varphi(u, v)$ ahela τ iga kaare (u, v) jaoks konstantse arvu $a > 0$ võrra nii, et vähemalt üks selle ahela kaartest muutuks küllastatuks, ülejäänud kaarte korral aga ei ületaks voog kaare läbilaskevõimet. Siis esialgne voo suurus $\bar{\varphi}$ kasvab samuti arvu $a > 0$ võrra. Edasi asume uuesti täitma algoritmi 2.sammu.

Algoritmi põhjendus pole keeruline. Illustreerime kirjeldatud algoritmi tööd järgneva näitega.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

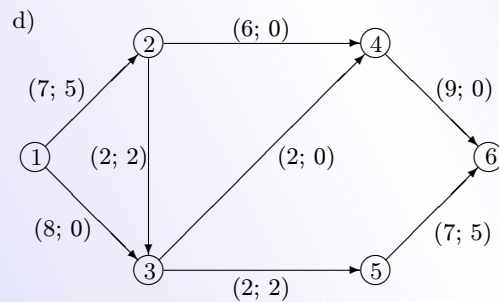
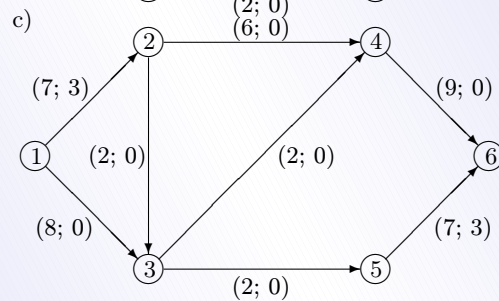
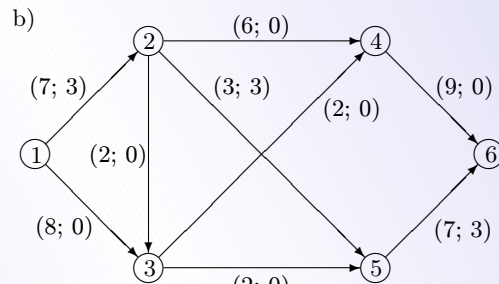
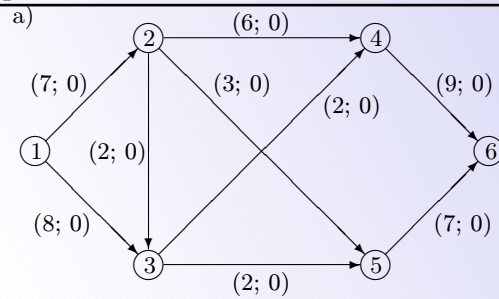
◀ ▶

Lk 180 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.42: Küllastunud voo leidmine I

Autori koduleht

Tiitelleht



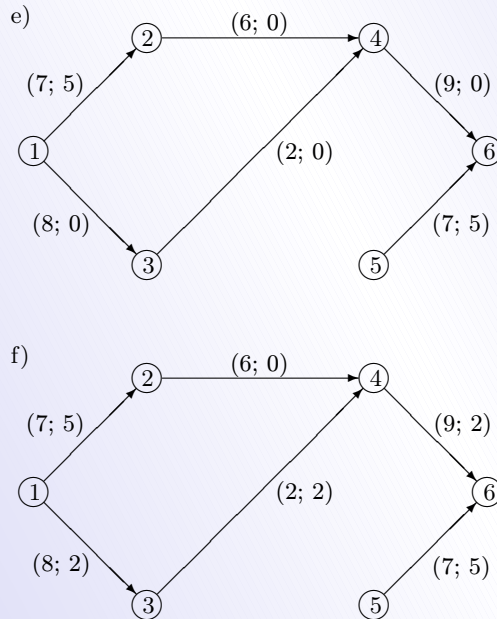
Lk 181 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 5.84. Leiame küllastunud voo joonisel 5.42, a) kujutatud võrgule, kus algselt on juba võetud vooks nullvoog (st algoritmi esimene samm on tehtud). Kuna sellel graafil küllastunud kaari pole, siis 2.samm suunab töö edasi 3.sammule. Selle kohaselt valime lihtahela $\tau = (1, 2, 5, 6)$ alguspunktist 1 lõpp-punkti 6. Algoritmi 4.sammu kohaselt saab ahela τ iga kaare voogu suurendada 3 võrra. Nii saame joonisel 5.42, b) kujutatud graafi $\mathcal{D}^*$. Järgnevalt pöördume tagasi algoritmi 2.sammu juurde. Selle kohaselt eemaldame graafist $\mathcal{D}^*$ küllastunud kaare $(2, 5)$. Saadud graafi tähistame jälle $\mathcal{D}^*$ ja see on kujutatud joonisel 5.42, c). Edasi valime 3.sammu kohaselt tekkinud graafis $\mathcal{D}^*$ lihtahela $\tau_1 = (1, 2, 3, 5, 6)$ võrgu $\mathcal{D}$ alguspunktist 1 lõpp-punkti 6. Algoritmi 4.sammu kohaselt suurendame ahela τ_1 iga kaare voogu 2 võrra. Nii tekib joonisel 5.42, d) kujutatud graaf $\mathcal{D}^*$.



Joonis 5.43: Küllastunud voo leidmine II

Edasi tuleb jätkata tööd jälle algoritmi 2.sammust. Selle kohaselt eemaldame graafist $\mathcal{D}^*$ küllastunud kaared $(2, 3)$ ja $(3, 5)$. Tekib jooni-

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

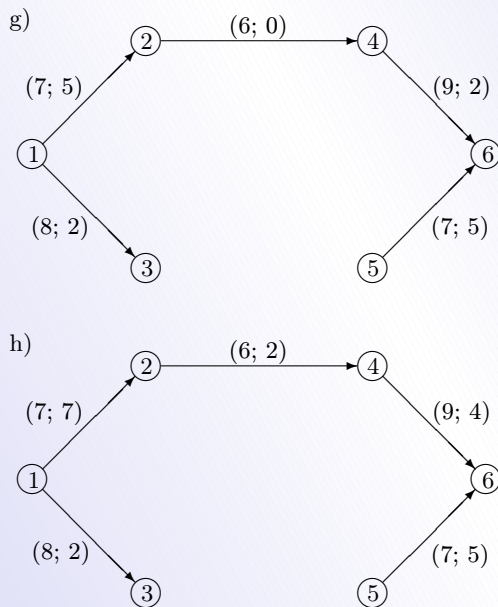
Lk 182 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

sel 5.43, e) kujutatud graaf $\mathcal{D}^*$. Algoritmi 3.sammu põhjal valime lihtahela $\tau_2 = (1, 3, 4, 6)$ alguspunktist 1 lõpp-punkti 6. Algoritmi 4.sammu kohaselt suurendame ahela τ_2 kõigi kaarte vooge 2 võrra. Tekib joonisel 5.43, f) kujutatud graaf $\mathcal{D}^*$. Nüüd alustame jälle tööd algoritmi 2.sammust. Selle kohaselt kõrvaldame graafist $\mathcal{D}^*$ küllastunud kaare $(3, 4)$. Tekib joonisel 5.44, g) kujutatud graaf $\mathcal{D}^*$. Algoritmi 3.sammu põhjal valime selles graafis lihtahela $\tau_3 = (1, 2, 4, 6)$ alguspunktist 1 lõpp-punkti 6. Algoritmi 4.sammu kohaselt suurendame ahela τ_3 kõigi kaarte vooge 2 võrra. Tekib joonisel 5.44, h) kujutatud graaf $\mathcal{D}^*$. Pöördume jälle tagasi algoritmi 2.sammu juurde. Selle põhjal kõrvaldame graafist $\mathcal{D}^*$ küllastunud kaare $(1, 2)$. Tekib joonisel 5.45, i) kujutatud graaf $\mathcal{D}^*$. Algoritmi 3.sammu kohaselt lõpetab algoritm töö. Esialgse võrgu küllastunud voog saadakse, kui joonisel 5.45, i) kujutatud graafile lisada kõik algoritmi töö jooksul kõrvaldatud küllastunud kaared. Esialgne võrk koos küllastunud vooga on kujutatud joonisel 5.45, j). Hiljem veendume, et saadud küllastunud voog pole maksimaalne.



Joonis 5.44: Küllastunud voo leidmine III

Autori koduleht

Tiitelleht

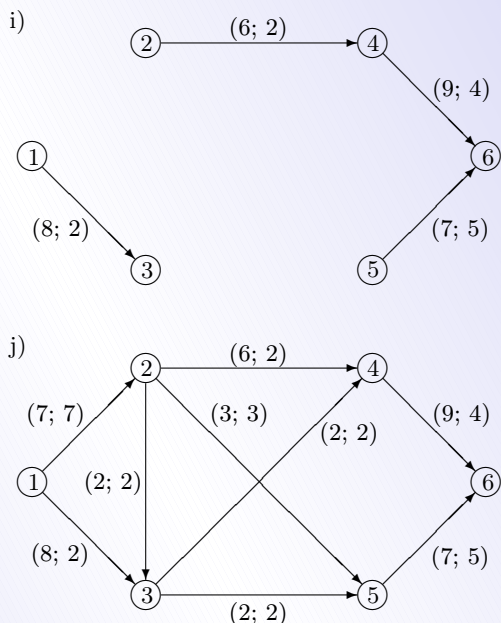


Lk 183 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.45: Küllastunud voo leidmine IV

Kirjeldamaks maksimaalse voo leidmist võrgus, vajatakse abimõisteid. Vaatleme võrku $(\mathcal{D}, c)$, $\mathcal{D} = (T, K)$ alguspunktiga u_1 ja lõpppunktiga u_n .

Valime tippude hulga alamhulga $T_1 \subset T$ nii, et $u_1 \notin T_1$ ja $u_n \in T_1$. Moodustame kaarte hulga

$$K_1 = \{ (u, v) \mid (u, v) \in K, u \notin T_1, v \in T_1 \}.$$

Tekkinud kaarte hulga K_1 nimetatakse graafi $\mathcal{D}$ **lõikeks** tippude hulga T_1 järgi. Lõike K_1 **läbilaskevõimeks** nimetatakse arvu

$$c(K_1) = \sum_{(u,v) \in K_1} c(u, v).$$

Minimaalseks lõikeks vaadeldavas võrgus nimetatakse minimaalse läbilaskevõimega lõiget.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 184 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Näide 5.85. Vaatleme joonisel 5.45, j) kujutatud võrku. Valides $T_1 = \{2, 5, 6\}$, saadakse sellele tippude hulga vastavaks lõikeks kaarte hulk $K_1 = \{(1, 2), (3, 5), (4, 6)\}$. Lõike K_1 läbilaskevõime on 18.

Teoreem 5.86. Kui φ on voog võrgus $(\mathcal{D}, c)$ alguspunktiga u_1 ja lõpp-punktiga u_n , $\mathcal{D} = (T, K)$ ja $T_1 \subset T$, $u_1 \notin T_1$, $u_n \in T_1$, siis

$$\bar{\varphi} \leq c(K_1),$$

kus $\bar{\varphi}$ on voo φ suurus ja K_1 on graafi $\mathcal{D}$ lõige tippude hulga T_1 järgi.

Tõestus. Kasutades võrdust (5.26), saadakse

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \sum_{(w, u_n) \in K} \varphi(w, u_n) = \\ &= \sum_{(w, u_n) \in K} \varphi(w, u_n) + 0 = \sum_{(w, u_n) \in K} \varphi(w, u_n) + \\ &+ \sum_{v \in T_1 \setminus \{u_n\}} \left(\sum_{(w, v) \in K} \varphi(w, v) - \sum_{(v, w) \in K} \varphi(v, w) \right) = \\ &= \sum_{v \in T_1} \left(\sum_{(w, v) \in K} \varphi(w, v) - \sum_{(v, w) \in K} \varphi(v, w) \right) = \\ &= \sum_{v \in T_1} \sum_{(w, v) \in K} \varphi(w, v) - \sum_{v \in T_1} \sum_{(v, w) \in K} \varphi(v, w) \leq \\ &\leq \sum_{v \in T_1} \sum_{(w, v) \in K} \varphi(w, v) - \sum_{w, v \in T_1} \sum_{(w, v) \in K} \varphi(w, v) = \\ &= \sum_{v \in T_1, w \notin T_1, (w, v) \in K} \varphi(w, v) = \sum_{(w, v) \in K_1} \varphi(w, v) \leq \\ &\leq \sum_{(w, v) \in K_1} c(w, v) = c(K_1). \quad \square \end{aligned}$$

Olgu antud voog φ võrgus $(\mathcal{D}, c)$. Moodustame orienteeritud multi-graafi $\mathcal{D}_\varphi = (T_\varphi, K_\varphi)$ järgmiselt:

$$T_\varphi = T, \quad K_\varphi = K \cup \{(v, u) \mid (u, v) \in K\}.$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 185 / 247

Tagasi

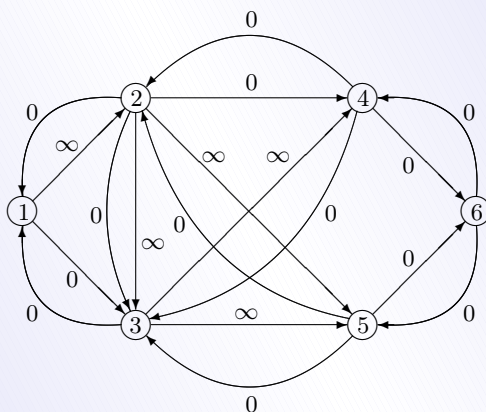
Täisekraan

Lahku failist

Seega graafide $\mathcal{D}$ ja $\mathcal{D}_\varphi$ tippude hulgad langevad kokku ning graafi $\mathcal{D}$ igale kaarele (u, v) vastab graafis $\mathcal{D}_\varphi$ kaks kaart: (u, v) ja (v, u) . Multigraafi $\mathcal{D}_\varphi$ igale kaarele paneme vastavusse selle pikkuse: kui $(u, v) \in K$, siis

$$l(u, v) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \varphi(u, v) < c(u, v), \\ \infty, & \text{kui } \varphi(u, v) = c(u, v), \end{cases}$$

$$l(v, u) = \begin{cases} 0, & \text{kui } \varphi(u, v) > 0, \\ \infty, & \text{kui } \varphi(u, v) = 0. \end{cases}$$



Joonis 5.46: Voo poolt tekitatud multigraaf

Näide 5.87. Joonisel 5.45, j) kujutatud võrgu $(\mathcal{D}, c)$ ja voo φ korral saadud graaf $\mathcal{D}_\varphi$ on kujutatud joonisel 5.46.

Teoreem 5.88 (Ford-Fulkersoni teoreem). Olgu φ voog võrgus $(\mathcal{D}, c)$ alguspunktiga u_1 ja lõpp-punktiga u_n , $\mathcal{D} = (T, K)$ ja T_1 kõigi selliste tippude $u \in T$ hulk, mille korral minimaalse tee pikkus graafis $\mathcal{D}_\varphi$ tipust u tippu u_n on 0. Kui $u_1 \notin T_1$, siis voog φ on maksimaalne voog võrgus $\mathcal{D}$ ja

$$\bar{\varphi} = c(K_1).$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 186 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Tõestus. Olgu täidetud teoreemi eeldused. Oletame, et $u_1 \notin T_1$. Eelmist teoreemi tõestades saadi võrdus

$$\bar{\varphi} = \sum_{v \in T_1, (w, v) \in K} \varphi(w, v) - \sum_{v \in T_1, (v, w) \in K} \varphi(v, w). \quad (5.29)$$

Kui $v \in T_1$, $w \notin T_1$ ja $(v, w) \in K$, siis $\varphi(v, w) = 0$. Tõepoolest, vastasel juhul $l(w, v) = 0$ graafis $\mathcal{D}_\varphi$ ja $v \in T_1$ tõttu leiduks graafis $\mathcal{D}_\varphi$ tee pikkusega 0 tipust w tippu u_n . See on aga vastuolus eeldusega $w \notin T_1$. Seetõttu võrdus (5.29) teiseneb kujule

$$\begin{aligned} \bar{\varphi} &= \sum_{v \in T_1, (w, v) \in K} \varphi(w, v) - \sum_{v, w \in T_1; (v, w) \in K} \varphi(v, w) = \\ &= \sum_{v \in T_1, w \notin T_1, (w, v) \in K} \varphi(w, v). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Kui $v \in T_1$, $w \notin T_1$ ja $(w, v) \in K$, siis $l(w, v) = \infty$ graafis $\mathcal{D}_\varphi$ (vastasel juhul $l(w, v) = 0$ ja $v \in T_1$ tõttu leiduks graafis $\mathcal{D}_\varphi$ tee pikkusega 0 tipust w tippu u_n , mis oleks vastuolus tingimusega $w \notin T_1$). Järelikult $\varphi(w, v) = c(w, v)$ ning võrdus (5.30) võtab kuju

$$\bar{\varphi} = \sum_{v \in T_1, w \notin T_1, (w, v) \in K} c(w, v) = \sum_{(w, v) \in K_1} c(w, v) = c(K_1).$$

Saadud võrdusest ja teoreemist 5.86 järeldub, et voog φ on maksimaalne. $\square$

Järeldus 5.89. *Maksimaalse voo suurus võrgus võrdub selle võrgu minimaalse lõike läbilaskevõimega.*

Järeldus 5.90. *Kui φ on voog võrgus $\mathcal{D}$, mille korral lühim tee alguspunktist u_1 lõpp-punkti u_n graafis $\mathcal{D}_\varphi$ on ∞ , siis φ on maksimaalne voog võrgus $\mathcal{D}$.*

Teoreemist 5.88 ja selle järeldustest tuleneb

Ford-Fulkersoni algoritm maksimaalse voo leidmiseks võrgus

1.samm. Valime mingi voo φ_0 vaadeldavas võrgus $\mathcal{D}$. Vooks φ_0 võib valida nii nullvoo kui ka mingi küllastunud voo, mille leidmiseks juuba kirjeldasime algoritmi. Tähistame $i = 0$. Edasi asume 2.sammu täitmisele.

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)

Lk 187 / 247

[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

2.samm. Võrgu $\mathcal{D}$ ja voo φ_i jaoks leiame multigraafi $\mathcal{D}_{\varphi_i}$. Edasi asume 3.sammu täitmisele.

3.samm. Leiame graafis $\mathcal{D}_{\varphi_i}$ lihtahela τ_i alguspunktist u_1 lõpp-punkti u_n nii, et see oleks minimaalse pikkusega tee tipust u_1 tippu u_n . Kui tee τ_i pikkus on ∞ , siis voog φ_i on maksimaalne ja algoritmi töö on lõppenud. Vastasel juhul muudame kõigi teed τ_i moodustavate kaarte voogu maksimaalse võimaliku positiivse arvu a võrra: kui tee kuuluv kaar $(u, v) \in K$, siis defineerime $\varphi_{i+1}(u, v) = \varphi_i(u, v) + a$; kui aga tee kuuluv kaar $(u, v) \notin K$, siis defineerime $\varphi_{i+1}(v, u) = \varphi_i(v, u) - a$. Kuna $l(\tau_i) = 0$, siis selline $a > 0$ leidub. Teele τ_i mittekuuluvate kaarte $(u, v) \in K$ jaoks valime $\varphi_{i+1}(u, v) = \varphi_i(u, v)$. Nii saadakse uus voog φ_{i+1} võrgus $\mathcal{D}$, kusjuures $\bar{\varphi}_{i+1} = \bar{\varphi}_i + a$. Edasi tähistame arvu $i + 1$ sümboliga i ja pöördume uuesti 2.sammu täitmisele.

On ilmne, et algoritm lõpetab töö lõpliku arvu sammude järel.

Näide 5.91. Leiame maksimaalse voo joonisel 5.42, a) kujutatud võrgus (joonisel on kujutatud võrk koos nullvooga). Kuna meil on juba leitud selles võrgus küllastunud voog (vt näide 5.84), siis alustame Ford-Fulkersoni algoritmi rakendamist, valides 1.sammus vooks φ_0 joonisel 5.45, j) kujutatud voo. 2.sammu kohaselt peame moodustama graafi $\mathcal{D}_{\varphi_0}$. Graafi $\mathcal{D}_{\varphi_0}$ leidsime näites 5.87 ja see on kujutatud joonisel 5.46. Edasi asume algoritmi 3.sammu täitmisele. Selle kohaselt leiame graafis $\mathcal{D}_{\varphi_0}$ vähima pikkusega lihtahela tipust 1 tippu 6. Selleks ahelaks sobib $\tau_0 = (1, 3, 2, 4, 6)$. Muuta voogu φ_0 saame tees τ_0 arvu $a = 2$ võrra:

$$\varphi_1(1, 3) = \varphi_0(1, 3) + 2 = 4, \quad \varphi_1(2, 3) = \varphi_0(2, 3) - 2 = 0,$$

$$\varphi_1(2, 4) = \varphi_0(2, 4) + 2 = 4, \quad \varphi_1(4, 6) = \varphi_0(4, 6) + 2 = 6.$$

Nii tekib voog φ_1 esialgses võrgus. Vaadeldav võrk koos vooga φ_1 on kujutatud joonisel 5.47, a). Selle voo suurus on $\bar{\varphi}_1 = \bar{\varphi}_0 + 2 = 11$. Edasi pöördume tagasi algoritmi 2.sammu juurde ja leiame graafi $\mathcal{D}_{\varphi_1}$. Graaf $\mathcal{D}_{\varphi_1}$ on kujutatud joonisel 5.47, b). Algoritmi 3.sammu kohaselt leiame minimaalse pikkusega lihtahela graafi $\mathcal{D}_{\varphi_1}$ tipust 1 tippu 6. Lihtne on veenduda, et kõik teed tipust 1 tippu 6 graafis $\mathcal{D}_{\varphi_1}$ on

Autori koduleht

Tiitelleht



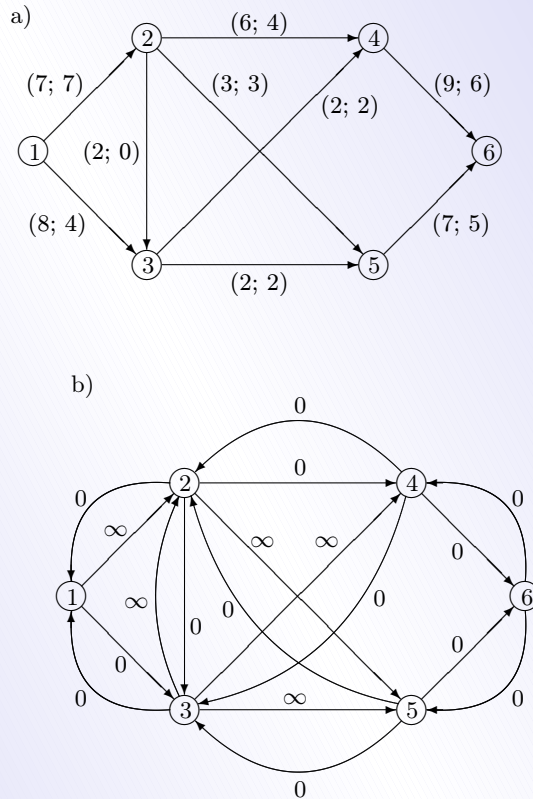
Lk 188 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

pikkusega ∞ . Seetõttu on voog φ_1 maksimaalne voog vaadeldavas võrgus. Nagu märgitud, selle voo suurus on 11.



Joonis 5.47: Maksimaalse voo leidmine

5.20. Ülesandeid

5.1 Näidata, et joonisel 5.48, a) kujutatud graaf on isomorfne näites **5.1** kirjeldatud graafiga.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

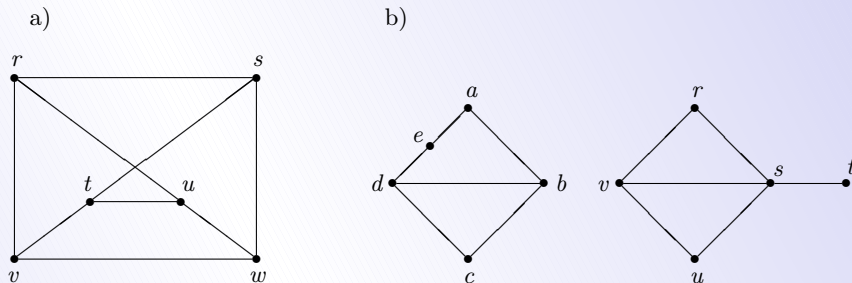
◀ ▶

Lk 189 / 247

Tagasi

Täisekraan

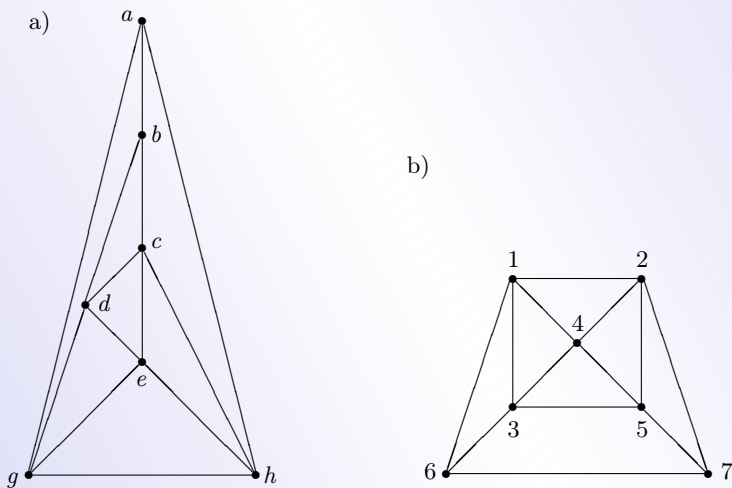
Lahku failist



Joonis 5.48: Ülesannete 5.1 ja 5.2 graafid

5.2 Näidata, et joonisel 5.48, b) kujutatud graafid pole isomorfsed.

5.3 Näidata, et joonisel 5.49 kujutatud graafid on isomorfsed.



Joonis 5.49: Ülesande 5.3 graafid

5.4 Otsustada, kas joonisel 5.50 kujutatud graafid on isomorfsed.

5.5 Otsustada, kas joonisel 5.51 kujutatud graafid on isomorfsed.

5.6 Leida joonisel 5.52 a) kujutatud graafi kaarte graaf. Joonisel on graafi tipud ja kaared nummerdatud.

5.7 Leida joonisel 5.52 b) kujutatud graafi $\mathcal{G}$ jaoks graafid $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ ja

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

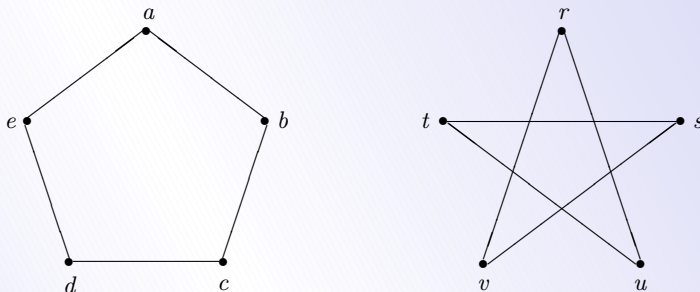
Lk 190 / 247

Tagasi

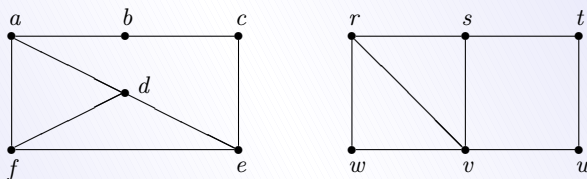
Täisekraan

Lahku failist

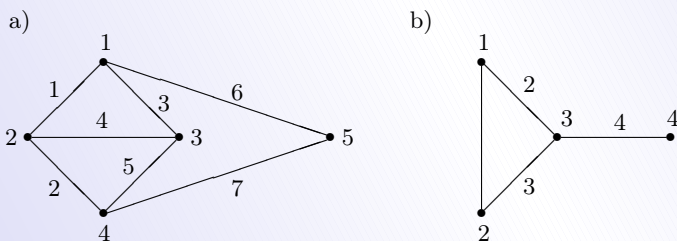
$\mathcal{L}(\mathcal{G})$). Joonisel on graafi tipud ja kaared nummerdatud.



Joonis 5.50: Ülesande 5.4 graafid



Joonis 5.51: Ülesande 5.5 graafid



Joonis 5.52: Ülesannete 5.6 ja 5.7 graafid

5.8 Leida joonisel 5.9, a) kujutatud graafi $\mathcal{G}$ jaoks graafid $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ ja $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{G}))$.

5.9 Kaarte graafi võib vaadelda ka multigraafi jaoks. Leida Königsbergi sildade ülesandele vastava multigraafi $\mathcal{G}$ kaarte graaf $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ ja veenduda, et saadud multigraafi $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ jaoks kehtib teoreemi 5.8 sõnastuses esitatud võrdus.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 191 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

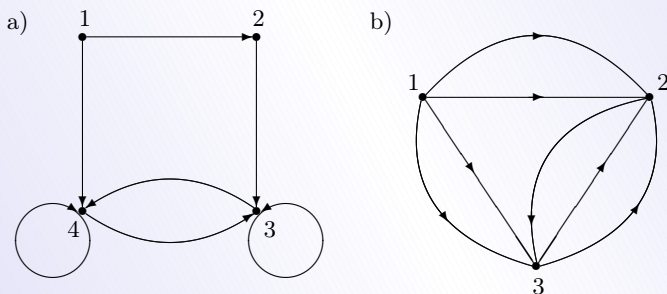
5.10 Leida joonisel 5.52, b) kujutatud graafi kaassus- ja intsidentsusmaatriks.

5.11 Joonestada graaf, mille kaassusmaatriks on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

5.12 Joonestada graaf, mille kaassusmaatriks on

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$



Joonis 5.53: Ülesannete 5.13 ja 5.16 graafid

5.13 Leida joonisel 5.53 a) kujutatud orienteeritud pseudograafi kaassusmaatriks.

5.14 Kontrollida joonisel 5.52, b) kujutatud graafi $\mathcal{G}$ jaoks seose (5.1) kehtivust.

5.15 Leida 4-teede arv tipust 1 tippu 2 joonisel 5.8 b) kujutatud graafis.

5.16 Leida 4-teede arv tipust 1 tippu 2 joonisel 5.53 b) kujutatud orienteeritud multigraafis.

Autori koduleht

Tiitelleht

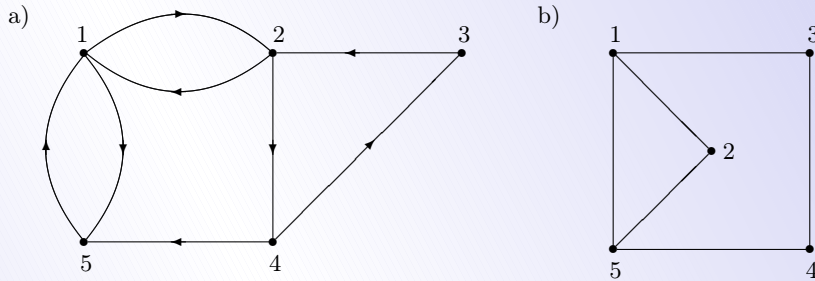


Lk 192 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.54: Ülesannete 5.17 ja 5.18 graafid

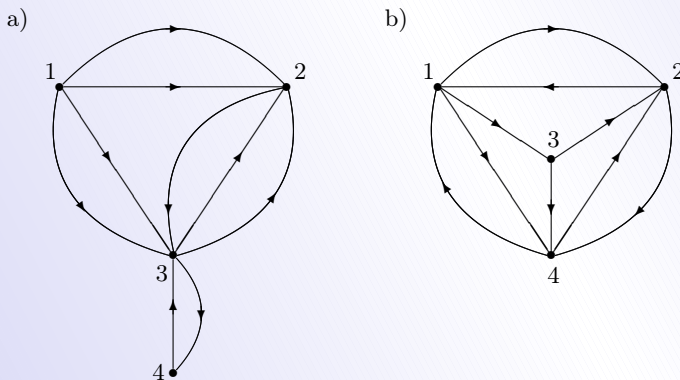
5.17 Leida 3-teede arv tipust 2 tippu 1 joonisel 5.54, a) kujutatud orienteeritud multigraafis.

5.18 Leida joonisel 5.54, b) kujutatud graafis 3-teede arv a) tipust 4 tippu 5, b) tipust 3 tippu 4, c) tipust 1 tippu 5.

5.19 Leida neljast kaarest koosnevate teede arv tipust 1 tippu 2 joonisel 5.55, a) kujutatud graafis.

5.20 Leida neljast kaarest koosnevate teede arv tipust 1 tippu 2 joonisel 5.55, b) kujutatud graafis.

5.21 Leida joonisel 5.56 kujutatud graafide jaoks Euleri tsükkel.



Joonis 5.55: Ülesannete 5.19 ja 5.20 graafid

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

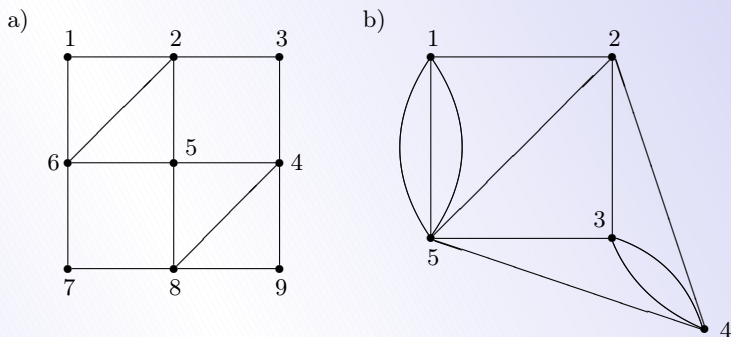
◀ ▶

Lk 193 / 247

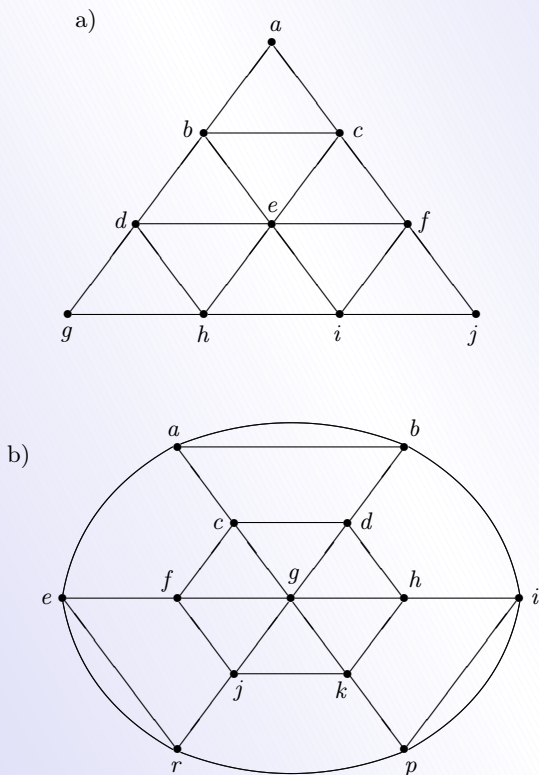
Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.56: Ülesande 5.21 graafid



Joonis 5.57: Ülesande 5.22 graafid

5.22 Joonistel 5.57, 5.58 ja 5.59, a) kujutatud multigraafide jaoks

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 194 / 247

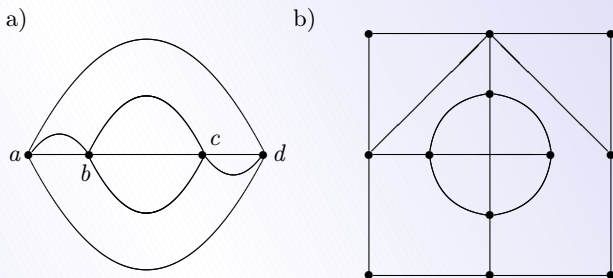
Tagasi

Täisekraan

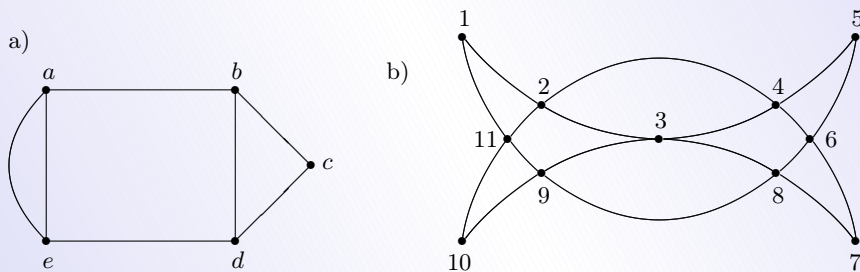
Lahku failist

leida, kui võimalik, Euleri tsükkel.

5.23 Joonisel 5.59, b) kujutatud multigraafi (nn **Mohamedi mōōgad**) jaoks leida Euleri tsükkel.



Joonis 5.58: Ülesande 5.22 graafid



Joonis 5.59: Ülesannete 5.22 ja 5.23 graafid

5.24 Leida Hamiltoni tsükkel joonisel 5.60, a) kujutatud graafis.

5.25 Näidata, et joonisel 5.60, b) kujutatud graafil Hamiltoni tsükkel puudub, kuid leidub Hamiltoni ahel.

5.26 Tähistagu $Q_n = (T, K)$ graafi, kus

$$T = \{i_1 i_2 \dots i_n \mid i_1, i_2, \dots, i_n \in \{0; 1\}\}$$

ning tipud $i_1 i_2 \dots i_n$ ja $j_1 j_2 \dots j_n$ on kaassed parajasti siis, kui nad erinevad vaid ühe sümboli võrra. Näidata, et juhul $n \geq 2$ omab graaf Q_n Hamiltoni tsükli.

Autori koduleht

Tiitelleht

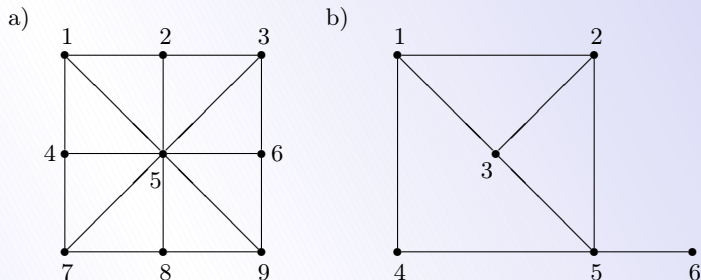
◀ ▶

Lk 195 / 247

Tagasi

Täisekraan

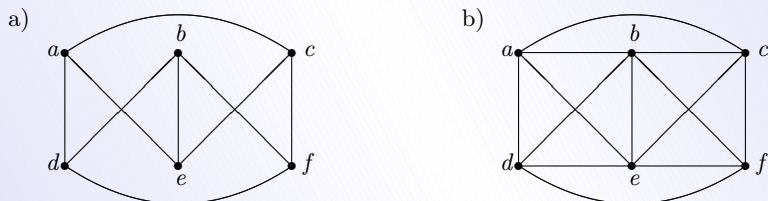
Lahku failist



Joonis 5.60: Ülesannete 5.24 ja 5.25 graafid

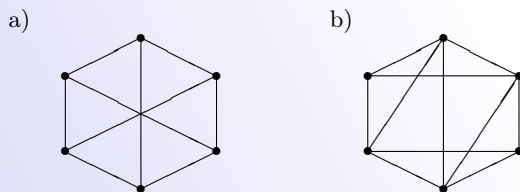
5.27 Joonisel 5.22, a) on kujutatud Peterseni graaf. Näidata, et Peterseni graaf ei oma Hamiltoni tsükli, kuid mistahes tipu u ja selle tipuga intsidentsete kaarte eemaldamisel vaadeldavast graafist tekkinud graaf omab Hamiltoni tsükli.

5.28 Otsustada, millised joonisel 5.61 esitatud graafidest on planaarsed.



Joonis 5.61: Ülesande 5.28 graafid

5.29 Otsustada, kas joonistel 5.62 ja 5.63 esitatud graafid on planaarsed. Planaarsuse korral esitada graaf tasandiliselt, mitteplanaarsuse korral aga leida alamgraaf, mis on homöomorfne kas graafiga K_5 või $K_{3,3}$.



Joonis 5.62: Ülesande 5.29 graafid

Autori koduleht

Tiitelleht

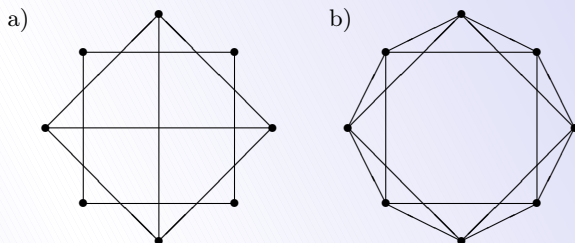
◀ ▶

Lk 196 / 247

Tagasi

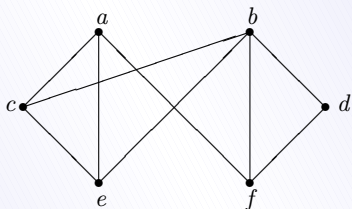
Täisekraan

Lahku failist



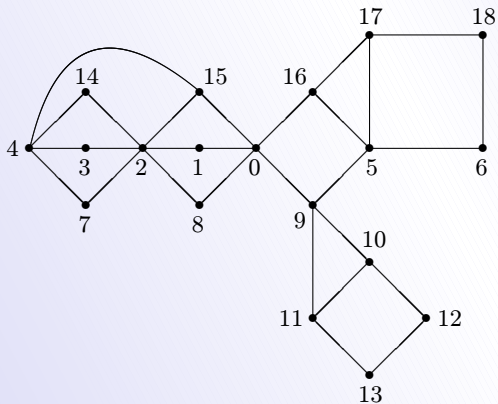
Joonis 5.63: Ülesande 5.29 graafid

5.30 Leida joonisel 5.64 kujutatud graafi kattev puu.



Joonis 5.64: Ülesande 5.30 graaf

5.31 Leida joonisel 5.65 kujutatud graafi kattev puu.



Joonis 5.65: Ülesande 5.31 graaf

Autori koduleht

Tiitelleht



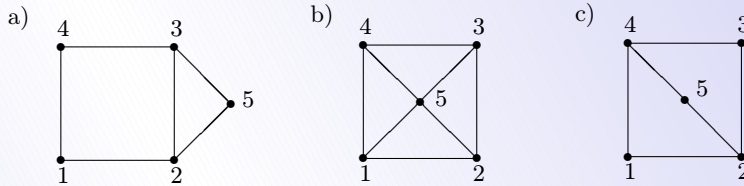
Lk 197 / 247

Tagasi

Täisekraan

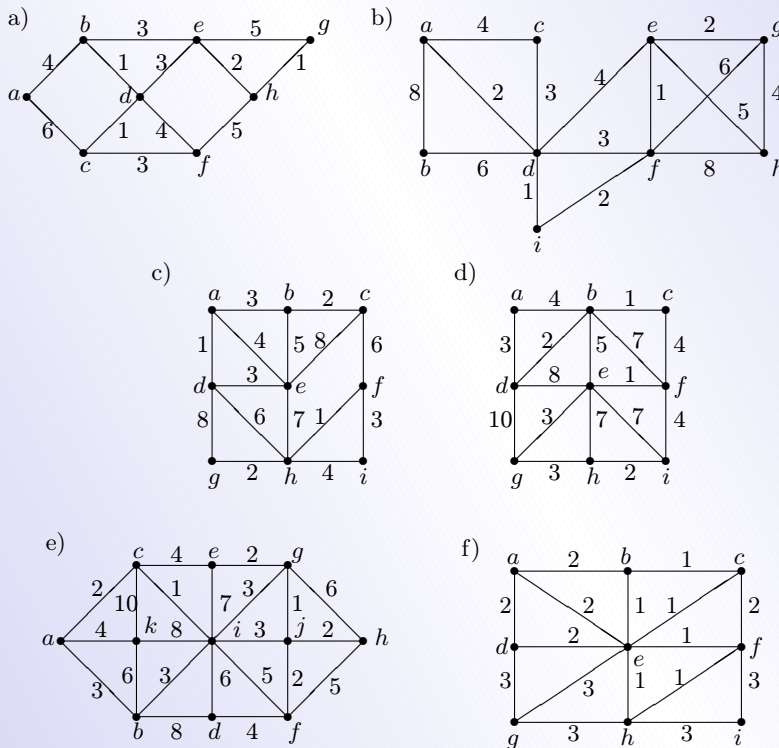
Lahku failist

5.32 Kasutades Kirchoffi valemit, leida joonisel 5.66 antud graafide kõigi katvate puude arvud.



Joonis 5.66: Ülesande 5.32 graafid

5.33 Leida joonisel 5.67 antud graafide minimaalsed katvad puud.



Joonis 5.67: Ülesande 5.33 graafid

Autori koduleht

Tiitelleht



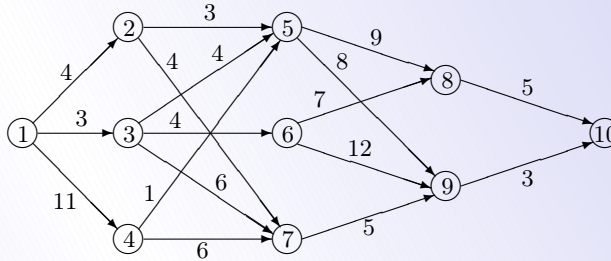
Lk 198 / 247

Tagasi

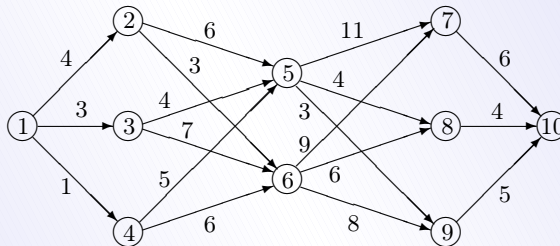
Täisekraan

Lahku failist

5.34 Leida lühim ja pikim tee ning nende pikkused tipust 1 tippu 10
joonisel 5.68 kujutatud graafis.

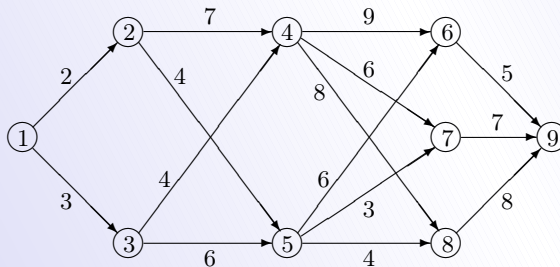


Joonis 5.68: Ülesande 5.34 graaf



Joonis 5.69: Ülesande 5.35 graaf

5.35 Leida lühim ja pikim tee ning nende pikkused tipust 1 tippu 10
joonisel 5.69 kujutatud graafis.

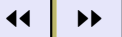


Joonis 5.70: Ülesande 5.36 graaf

5.36 Leida lühim ja pikim tee ning nende pikkused tipust 1 tippu 9
joonisel 5.70 kujutatud graafis.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 199 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5.37 Leida joonisel 5.38, b) kujutatud graafis lühim 5-tee tipust 1 tippu 1.

5.38 Leida lühim tee tipust 1 tippu 7 orienteeritud graafis, mille kaarte pikkuste matriks $\|l(i, j)\|$ on

$$\begin{vmatrix} \infty & \infty & 5 & 4 & 2 & 2 & 9 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 1 & 1 \\ 2 & \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 3 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & 2 & \infty & 1 & 6 \\ 1 & 5 & \infty & 1 & 1 & \infty & \infty \\ 2 & \infty & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{vmatrix}.$$

5.39 Leida lühim tee tipust 1 tippu 7 orienteeritud graafis, mille kaarte pikkuste matriks $\|l(i, j)\|$ on

$$\begin{vmatrix} \infty & 4 & \infty & \infty & 5 & 1 & \infty \\ 3 & \infty & 2 & 1 & \infty & \infty & \infty \\ 1 & 1 & \infty & \infty & \infty & \infty & 3 \\ \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 1 & 5 \\ \infty & 3 & \infty & 2 & 2 & \infty & \infty \\ \infty & \infty & 2 & \infty & \infty & 2 & \infty \end{vmatrix}.$$

5.40 Leida lühim tee tipust 1 tippu 7 orienteeritud graafis, mille kaarte pikkuste matriks $\|l(i, j)\|$ on

$$\begin{vmatrix} \infty & \infty & 9 & \infty & \infty & 2 & 12 \\ 1 & \infty & \infty & \infty & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty & 2 \\ \infty & 1 & 1 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & \infty & \infty & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 & \infty & 8 \\ \infty & 2 & 1 & \infty & 1 & 2 & \infty \end{vmatrix}.$$

5.41 Lahendada vahendite jaotamise ülesanne järgmiste algandmete korral:

$$n = 4, \quad c = 75,$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 200 / 247

Tagasi

Täisekraan

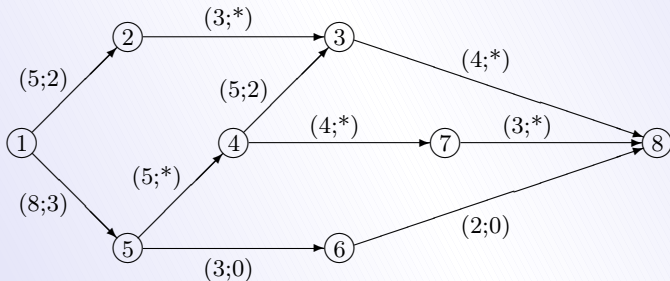
Lahku failist

x	0	15	30	45	60	75
$g_1(x)$	0	10	31	42	62	76
$g_2(x)$	0	12	26	36	54	78
$g_3(x)$	0	11	36	45	60	77
$g_4(x)$	0	16	37	46	63	80

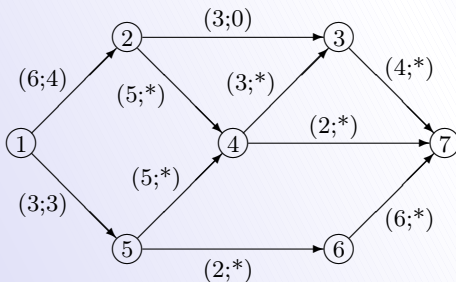
5.42 Lahendada vahendite jaotamise ülesanne järgmiste algandmete korral:

$$n = 5, \quad c = 150,$$

x	0	30	60	90	120	150
$g_1(x)$	0	8	20	30	45	60
$g_2(x)$	0	12	20	35	45	50
$g_3(x)$	0	9	22	35	50	60
$g_4(x)$	0	8	18	30	40	50
$g_5(x)$	0	10	20	35	45	60



Joonis 5.71: Ülesande 5.43 võrk



Joonis 5.72: Ülesande 5.44 võrk

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 201 / 247

Tagasi

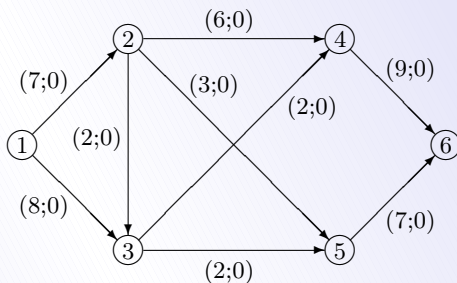
Täisekraan

Lahku failist

5.43 Joonisel 5.71 kujutatud võrgus täita lüngad nii, et tekiks voog.

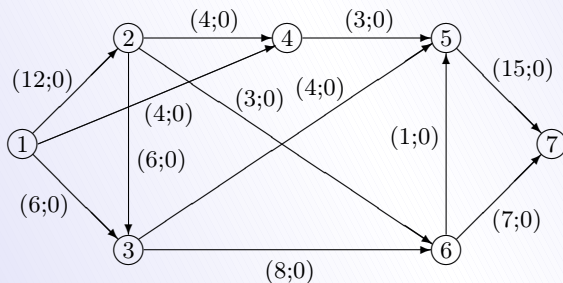
5.44 Joonisel 5.72 kujutatud võrgus täita lüngad nii, et tekiks voog.

5.45 Leida maksimaalne voog joonisel 5.73 kujutatud võrgus.



Joonis 5.73: Ülesande 5.45 võrk

5.46 Leida maksimaalne voog joonisel 5.74 kujutatud võrgus.



Joonis 5.74: Ülesande 5.46 võrk

5.47 Leida maksimaalne voog joonisel 5.75 kujutatud võrgus.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

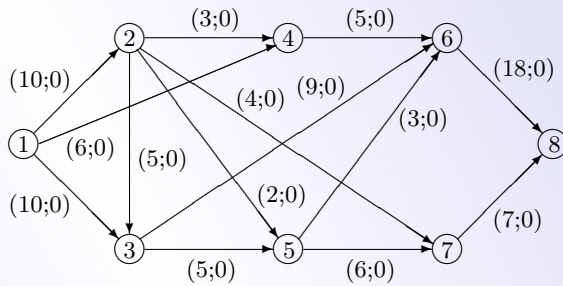
▶

Lk 202 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 5.75: Ülesande 5.47 võrk

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 203 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

6. Vastused

1 LAUSEARVUTUS

1.1. $(((\mathcal{A} \vee (\neg \mathcal{B})) \rightarrow \mathcal{C}) \equiv \mathcal{A}).$

1.2. $((\mathcal{D} \sim \mathcal{C}) \sim (((\mathcal{A} \wedge \mathcal{D}) \wedge \mathcal{B}) \vee (\neg \mathcal{D}))).$

1.3. $((\mathcal{C} \rightarrow (\neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{C}) \wedge \mathcal{A})) \sim \mathcal{B}).$

1.4. $((((\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A}) \rightarrow \mathcal{A}) \sim (\neg \mathcal{A} \vee \mathcal{B})).$

1.5.

X	Y	Z	$T\tilde{o}ev.$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

1.6.

X	Y	Z	$T\tilde{o}ev.$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 204 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.7.

X	Y	Z	$T\tilde{ev}.$
1	1	1	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

1.8.

X	Y	Z	$T\tilde{ev}.$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	0	1

1.9.

X	Y	Z	$T\tilde{ev}.$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	0
0	0	1	0
0	0	0	0

1.10.

X	Y	Z	$T\tilde{ö}ev.$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	0

1.11.

X	Y	Z	$T\tilde{ö}ev.$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	0
0	0	0	1

1.12.

X	Y	Z	$T\tilde{ö}ev.$
1	1	1	1
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	1
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

1.28. $\neg(\neg((\neg X \rightarrow Y) \rightarrow (Z \rightarrow Y)) \rightarrow (\neg X \rightarrow Z)).$

1.29. $\neg(\neg(X \vee \neg Y) \vee \neg X \vee \neg Y \vee \neg Z) \vee \neg(\neg(\neg(X \vee \neg Y) \vee \neg Z) \vee \neg(\neg X \vee \neg Y \vee \neg Z)).$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 206 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.30. $((\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow (Y \rightarrow \neg Z)) \rightarrow \neg(\neg(\neg X \rightarrow \neg Y) \rightarrow \neg(Y \rightarrow \neg Z)).$

1.31. $\neg(((X \rightarrow \neg Y) \rightarrow \neg(\neg X \rightarrow Y)) \rightarrow (\neg X \rightarrow Z))$ või $\neg(\neg(\neg X \rightarrow Z) \rightarrow ((X \rightarrow Y) \rightarrow \neg(Y \rightarrow X))).$

1.32. $\neg(\neg(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \wedge \neg(\neg X \wedge Y)).$

1.33. $\neg(\neg(\neg(\neg X \wedge Y) \wedge \neg(Y \wedge \neg Z)) \wedge \neg(\neg X \wedge Y \wedge \neg Z)).$

1.34. $Y \vee \neg Z.$

1.35. $Z.$

1.36. $Z \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$

1.37. $\neg Y.$

1.38. $\neg X \wedge \neg Y.$

1.39.

$$(X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3).$$

1.40.

$$(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3).$$

1.41.

$$(X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge X_3) \vee (\neg X_1 \wedge X_2 \wedge \neg X_3) \vee (\neg X_1 \wedge \neg X_2 \wedge \neg X_3).$$

Autori koduleht

Titledleht



Lk 207 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.42.

$$(X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z).$$

$$1.43. \quad (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee \neg X_3) \wedge (\neg X_1 \vee \neg X_2 \vee X_3) \equiv \neg X_1 \vee \neg X_2.$$

$$1.44. \quad (\neg X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3) \wedge (X_1 \vee X_2 \vee \neg X_3).$$

$$1.45. \quad (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \equiv \neg X \vee Y.$$

$$1.46. \quad (\neg X \vee Y \vee \neg Z) \wedge (X \vee Y \vee \neg Z).$$

$$1.47. \quad (\neg X \vee \neg Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee Y \vee Z) \wedge (X \vee \neg Y \vee Z).$$

1.48.

$$(X \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z) \equiv \\ \equiv (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge Z) \vee (X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge Z)$$

1.49.

$$(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z) \equiv \\ \equiv (X \wedge Y \wedge Z) \vee (X \wedge Y \wedge \neg Z) \vee (\neg X \wedge \neg Y \wedge \neg Z)$$

$$1.50. \quad x + z + xy + xz + yz, \quad 1 + x + y + z + xz + yz + xyz.$$

$$1.51. \quad x + z + xy + xyz.$$

$$1.52. \quad 1 + xy + xz + yz + xyz.$$

$$1.53. \quad 1 + x + y + xy + xz + yz + xyz.$$

$$1.54. \quad 1 + x + z + xy.$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 208 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

1.55. $1 + x + y + xy + xz.$

1.56. $x + yz + xyz.$

1.57. $1 + y + yz + xyz.$

1.58. Oletagem, et $g(x, y)$ on kahe muutuja Boole'i funktsioon, millest liitfunktsioonide moodustamise teel saadakse kätte kõik Boole'i funktsioonid. Kui $g(1, 1) = 1$, siis $h(1, \dots, 1) = 1$ iga Boole'i funktsiooni $h(x_1, \dots, x_n)$ korral, sest funktsioon h saadakse liitfunktsioonina funktsioonist g . Kuid funktsiooni $h(x) = 1 + x$ korral $h(1) = 0 \neq 1$. Saadud vastuolu näitab, et $g(1, 1) = 0$. Analoogiliselt veendutakse, et $g(0, 0) = 1$. Oleme saanud osaliselt täidetud funktsiooni g väärtuste tabeli

x	y	$g(x, y)$
1	1	0
1	0	
0	1	
0	0	1

Kui selle tabeli täitmata jäänud teise ja kolmanda rea väärtused oleksid 1 ja 1, langeks funktsioon g kokku Shefferi kriipsuga. Kui aga tabeli teise ja kolmanda rea väärtused oleksid 0 ja 0, oleks funktsiooniks g Webb'i nool. Kui tabeli teise ja kolmanda rea väärtused oleksid vastavalt 0 ja 1, siis $g(x, y) = \bar{x}$. Sel juhul iga liitfunktsioon funktsioonist g avalduks esimese argumendi korduva eitusega, mis pole konstantne funktsioon, ning samaselt arvuga 1 võrduv konstantne funktsioon ei saa avalduda liitfunktsioonina funktsioonist g . Analoogiliselt, kui tabeli teise ja kolmanda rea väärtused on vastavalt 1 ja 0, siis $g(x, y) = \bar{y}$ ning samaselt arvuga 1 võrduv konstantne funktsioon ei saa avalduda liitfunktsioonina funktsioonist g . Järelikult kahe muutuja funktsiooniks, mille liitfunktsioonidena avalduvad kõik Boole'i funktsioonid, saab olla kas Webb'i nool või Sheffer'i kriips.

1.59. Kuna $\bar{x} = 1 + x$ ja $x \sim y = 1 + x + y$, siis iga liitfunktsioon f , mis on saadud funktsioonidest $\neg$ ja $\sim$, avaldub kujul $f(x_1, \dots, x_n) =$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 209 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$a_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n$, kus $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{B} = \{0, 1\}$. Oletagem, et iga Boole'i funktsioon avaldub liitfunktsioonina funktsioonidest $\neg$ ja $\sim$. Siis peab ka funktsioon $x \wedge y = xy$ avalduma liitfunktsioonina mainitud funktsioonidest ja $xy = a + bx + cy$ mingite $a, b, c \in \mathbb{B}$ korral. Valides $x = y = 0$, saadakse $a = 0$. Valides $x = 0, y = 1$, saadakse $c = 0$. Analoogiliselt $x = 1, y = 0$ korral saadakse $b = 0$. Seega $xy = 0$ iga $x, y \in \mathbb{B}$ korral, mis aga on võimatu. Järelikult kõik Boole'i funktsioonid ei saa avalduda liitfunktsioonidenä funktsioonidest $\neg$ ja $\sim$.

1.60. Olgu $g(x, y) = x \rightarrow y$ ja $h(x, y) = x \vee y$. Tähistagu $f(x, y)$ mis tahes kahe muutuja liitfunktsiooni funktsioonidest g ja h . Kuna $g(1, 1) = h(1, 1) = 1$, siis ilmselt $f(1, 1) = 1$. Seetõttu näiteks Boole'i funktsioon $x + y$ ei avaldu liitfunktsioonina funktsioonidest $\rightarrow$ ja $\vee$.

Juhis ülesannete 1.61 ja 1.62 lahendamiseks: Valemitest $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ järeldeb valem $\mathcal{B}$, kui neil väärtustustel mil valemid $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ on tõesed, on tõene ka valem $\mathcal{B}$. Kehtib: valemitest $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \dots, \mathcal{A}_n$ järeldeb valem $\mathcal{B}$ parajasti siis, kui valem

$$\mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \dots \wedge \mathcal{A}_n \longrightarrow \mathcal{B}$$

on tautoloogia.

1.61. Tähistagem:

X - John ei kohanud öösel Smithi,
 Y - Smith on mõrvar,
 Z - John valetab,
 U - mõrv toimus pärast keskööd.

Vastavalt ülesande tingimustele peame kontrollima, kas lausetest

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= X \longrightarrow (Y \vee Z), \\ \mathcal{A}_2 &= \neg Y \longrightarrow (X \wedge U), \\ \mathcal{A}_3 &= U \longrightarrow (Y \vee Z)\end{aligned}$$

järeldeb lause $\mathcal{B} = Y$ ehk kas valem

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3 \longrightarrow \mathcal{B}$$

[Autori koduleht](#)
[Tiitelleht](#)
[◀◀](#)
[▶▶](#)
[◀](#)
[▶](#)
[Lk 210 / 247](#)
[Tagasi](#)
[Täisekraan](#)
[Lahku failist](#)

on samaselt tõene. Kontrollime, kas valem $\mathcal{A}$ saab olla väär:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} \equiv 0 &\iff \begin{cases} \mathcal{B} \equiv 0 \\ \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}_3 \equiv 1 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} Y \equiv 0 \\ X \longrightarrow (Y \vee Z) \equiv 1 \\ \neg Y \longrightarrow (X \wedge U) \equiv 1 \\ U \longrightarrow (Y \vee Z) \equiv 1 \end{cases} \iff \\ &\iff \begin{cases} Y \equiv 0 \\ X \longrightarrow Z \equiv 1 \\ X \wedge U \equiv 1 \\ U \longrightarrow Z \equiv 1 \end{cases} \iff \begin{cases} Y \equiv 0 \\ Z \equiv 1 \\ X \equiv 1 \\ U \equiv 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Seega on võimalik, et valem $\mathcal{A}$ on väär, st ei saa järeldada, et Smith on mõrvar.

1.62. Tähistagem:

X - kapitalimahutused ei muutu,
 Y - valitsuskulud kasvavad,
 Z - tekib tööpuudus,
 U - maksed vähenevad.

Vastavalt ülesande tingimustele peame kontrollima, kas lausetest

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 &= X \longrightarrow (Y \wedge Z), \\ \mathcal{A}_2 &= \neg Y \longrightarrow U, \\ \mathcal{A}_3 &= X \wedge U \longrightarrow \neg Z \end{aligned}$$

järeldub lause $\mathcal{B} = Y$ ehk kas valem

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \wedge \mathcal{A}_2 \wedge \mathcal{A}_3 \longrightarrow \mathcal{B}$$

on samaselt tõene. Kontrollime, kas valem $\mathcal{A}$ saab olla väär:

$$\mathcal{A} \equiv 0 \iff \begin{cases} \mathcal{B} \equiv 0 \\ \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_2 \equiv \mathcal{A}_3 \equiv 1 \end{cases} \iff$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 211 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\iff \begin{cases} Y \equiv 0 \\ X \longrightarrow (Y \wedge Z) \equiv 1 \\ \neg Y \longrightarrow U \equiv 1 \\ X \wedge U \longrightarrow \neg Z \equiv 1 \end{cases} \iff \begin{cases} Y \equiv 0 \\ X \equiv 0 \\ U \equiv 1 \end{cases}$$

Seega on võimalik, et valem $\mathcal{A}$ on väär, st ei saa järeldada, et valitussukulud kasvavad.

1.63. Selle ülesande lahendamiseks esineme turisti rollis ja tähistame sümbolitega X ja Y laused:

X – Vidrik räägib alati tõtt,
 Y – vasakpoolne tee suundub pealinna.

Moodustame lausetest X ja Y liitlause $\mathcal{A}$ ja esitame Vidrikule küsimuse "Kas on õige lause $\mathcal{A}$?". Lause $\mathcal{A}$ moodustame aga nii, et Vidriku vastus on "ja (1)" parajasti siis, kui lause Y on tõene. Sellisele tingimusele vastava $\mathcal{A}$ jaoks tõeväärtustabel on

X	Y	Vidriku vastus	$\mathcal{A}$
1	1	1	1
1	0	0	0
0	1	1	0
0	0	0	1

Nüüd saab tabelist välja kirjutada ka lause (valemi) $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A} = (X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Y).$$

Seega turist peaks esitame küsimuse: "Kas on õige, et Sa räägid tõtt ja vasakpoolne tee viib pealinna või Sa valetad ja parempoolne tee viib pealinna?". Kui Vidrik vastab "ja", siis vasakpoolne tee viib pealinna, kui aga Vidrik vastab "ei", siis viib parempoolne tee pealinna.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 212 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

2 PREDIKAATARVUTUS

2.1. 1) a) $\forall y S(x, y, y)$

b) $\forall y P(x, y, y)$

c) $\exists y (\forall z P(y, z, z) \wedge S(y, y, x))$

d) $\exists y S(y, y, x)$

e) $\neg \exists y S(y, y, x)$

f) $\neg \exists u \exists v (P(u, v, x) \wedge \neg \forall y P(y, u, y) \wedge \neg \forall z P(z, v, z)) \wedge$

$$\wedge \neg \forall w P(x, w, w) \equiv$$

$$\equiv \forall w P(x, w, w) \wedge \forall u \forall v (P(u, v, x) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (\forall z P(u, z, z) \vee \forall t P(v, t, t)))$$

2) a) $\mathcal{A}_1(x, y) = \exists u (\forall v S(u, v, v) \wedge S(x, u, y)) \equiv$

$$\equiv \exists z (S(x, x, z) \wedge S(y, y, z))$$

b) $\mathcal{A}_2(x, y) = \exists z S(x, z, y)$

c) $\neg \mathcal{A}_1(x, y) \wedge \mathcal{A}_2(x, y) =$

$$= \neg \exists u (\forall v S(u, v, v) \wedge S(x, u, y)) \wedge \exists z S(x, z, y)$$

d) $\exists z P(x, z, y)$

3) a) $\exists u_1 P(x, u_1, z) \wedge \exists v_1 P(y, v_1, z) \wedge$

$$\wedge \forall u (\exists u_2 P(x, u_2, u) \wedge \exists v_2 P(y, v_2, u) \longrightarrow \exists u_3 P(u, u_3, z))$$

b) $\exists u_1 P(z, u_1, x) \wedge \exists v_1 P(z, v_1, y) \wedge$

$$\wedge \forall u (\exists u_2 P(u, u_2, x) \wedge \exists v_2 P(u, v_2, y) \longrightarrow \exists u_3 P(u, u_3, z))$$

2.2. 1) $\forall x \forall y (P(x) \wedge P(y) \longrightarrow \exists z (S(z) \wedge A(x, z) \wedge A(y, z) \wedge$

$$\wedge (\exists u (S(u) \wedge A(x, u) \wedge \neg A(y, u)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \forall v \forall t (S(v) \wedge P(t) \wedge A(x, v) \wedge A(y, v) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow (A(t, z) \sim A(t, v))))))$$

2) $\forall x \forall y \forall z (P(x) \wedge P(y) \wedge P(z) \wedge \neg \exists u (S(u) \wedge A(x, u) \wedge$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 213 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

$$\begin{aligned} & \wedge A(y, u) \wedge A(z, u)) \longrightarrow \exists v(T(v) \wedge A(x, v) \wedge \\ & \wedge A(y, v) \wedge A(z, v) \wedge \forall t(T(t) \wedge A(x, t) \wedge A(y, t) \wedge A(z, t) \longrightarrow \\ & \longrightarrow \forall p(P(p)(\longrightarrow (A(p, z) \sim A(p, t))))) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & \mathcal{A}(u, v) = S(u) \wedge S(v) \wedge \exists t(T(t) \wedge A(u, t) \wedge A(v, t) \wedge \\ & \wedge \neg \exists p(P(p) \wedge A(p, u) \wedge A(p, v))) \end{aligned}$$

$\mathcal{A}(u, v)$ on tõene parajasti siis, kui u ja v on paralleelsed sirged.

$$\begin{aligned} 4) \quad & \mathcal{A}(u, v) = T(u) \wedge T(v) \wedge (\neg \exists x(P(x) \wedge A(x, u) \wedge A(x, v)) \vee \\ & \vee (\exists y(P(y) \wedge A(y, u) \wedge A(y, v)) \longrightarrow \\ & \longrightarrow \forall w(P(w) \longrightarrow (A(w, u) \sim A(w, v))))) \end{aligned}$$

$\mathcal{A}(u, v)$ on tõene parajasti siis, kui u ja v on paralleelsed tasandid.

2.6. Valime keele, mille tähestik sisaldab konstantsümboleid 0 ja 1 ning kahekohalist predikaatsümbolit $\geq$. Valime

$$\mathcal{A} = (0 \geq 1), \quad \mathcal{B}(x) = (x \geq y).$$

Kui $\mathcal{C} \equiv \mathcal{D}$, siis mis tahes interpretatsiooni korral kandjaga M vaba tundmatu y iga väärtustuse $y = a \in M$ korral valemite $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ tõeväärtused $\mathcal{C}(a)$ ja $\mathcal{D}(a)$ peavad langema kokku. Valime interpretatsiooni kandjaks $M = \mathbb{N}$ ja interpreteerime konstantsümboleid 0 ja 1 kui arve 0 ja 1 ning predikaatsümbolit $\geq$ kui vastavat seost naturaalarvude hulgal. Siis $y = a = 2$ korral

$$\mathcal{C}(a) = \forall x((0 \geq 1) \sim (x \geq 2)) = 0 \quad (\text{väär}),$$

$$\mathcal{D}(a) = ((0 \geq 1) \sim \forall x(x \geq 2)) = 1 \quad (\text{tõene}).$$

Kuna $\mathcal{C}(a) \neq \mathcal{D}(a)$, siis valemid $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ pole samaväärsed.

2.7. Valides keele ja interpretatsiooni nagu eelmises ülesandes, saadakse

$$\mathcal{C}(2) = \exists x((0 \geq 1) \sim (x \geq 2)) = 1 \quad (\text{tõene}),$$

$$\mathcal{D}(2) = ((0 \geq 1) \sim \exists x(x \geq 2)) = 0 \quad (\text{väär}).$$

Seega valemid $\mathcal{C}$ ja $\mathcal{D}$ pole samaväärsed.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀

▶

◀

▶

Lk 214 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

2.8. Ei ole:

$$\mathcal{A} \text{ – antud valem; } \mathcal{A} \equiv 0 \iff \exists x P(x) \equiv 1, \forall y P(y) \equiv 0.$$

Selliseid predikaatsümbolite interpretatsioone leidub:

$$M = \mathbb{N}, \quad P(x) : x \text{ on paarisarv.}$$

2.9. Ei ole:

$$\mathcal{A} \text{ – antud valem; } \mathcal{A} \equiv 1 \iff \exists x P(x) \equiv 1, \forall y P(y) \equiv 0.$$

Leidub selliseid predikaatsümbolite interpretatsioone, kus see pole täidetud:

$$M = \mathbb{N}, \quad P(x) : x \leq -1.$$

2.10. On, sest valem ei saa olla kunagi väär:

$$\begin{aligned} \exists x \forall y Q(x, y) \equiv 1 &\implies Q(x_0, y) \equiv 1 \text{ iga } y \text{ korral} \implies \\ &\implies \forall v \exists u Q(u, v) \equiv 1 \end{aligned}$$

(iga v jaoks leidub u , selleks on x_0).

2.11. Ei ole:

$$M = \mathbb{N}; \quad Q(x, y) : x \text{ on väiksem kui } y,$$

$$\forall x \exists y Q(x, y) \equiv 1, \quad \exists v \forall u Q(u, v) \equiv 0.$$

2.15. $\forall x \exists y \forall z \exists u \neg \mathcal{A}.$

2.16. $\exists x \forall y \exists u \forall v (\mathcal{A}(x, y) \wedge \mathcal{B}(u, v)).$

2.17. $\exists x \forall y \exists u \forall v (\mathcal{A}(x, y) \vee \mathcal{B}(u, v)).$

2.18. $\forall x \exists y \exists u \forall v (\mathcal{A}(x, y) \longrightarrow \mathcal{B}(u, v)).$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 215 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4 ALGORITMITEORIA ELEMENTE

4.2. $L^* = \{\lambda, (10)^n \mid n = 1, 2, \dots\}.$

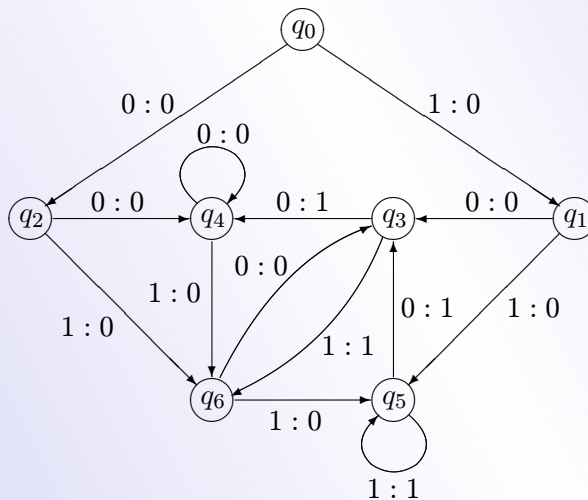
4.3. $L^* = \{\lambda, 1^{2n} \mid n = 1, 2, \dots\}.$

4.4. $L^* = \{\lambda, 1^m, 1^s 01^{t_1} 01^{t_2} \dots 01^{t_k} \mid m, t_1, \dots, t_k, s \geq 0, k = 1, 2, \dots\}.$

4.5. $L^* = \{\lambda, 1^m, 1^n 01^{t_1} 01^{t_2} \dots 01^{t_k} \mid m, n, t_k \geq 1, t_1, \dots, t_{k-1} \geq 2, k \geq 1\}.$

4.6. 001000.

4.8. Vt joonis 6.1.



Joonis 6.1: Ülesande 4.8 vastus

4.9. Vt joonis 6.2.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

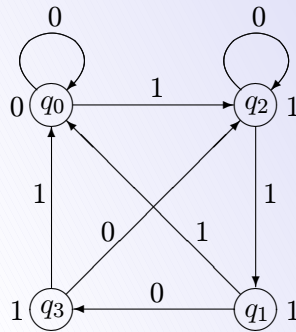
▶

Lk 216 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



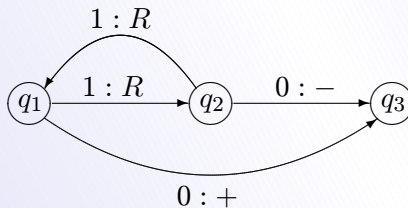
Joonis 6.2

a) 0011, b) 011011.

4.18. $S = \{0, 1, +, -\}$ (0 - tühi sümbol), $Q = \{q_1, q_2, q_3\}$ ja programm on

$$q_1 0 + q_3, \quad q_1 1 R q_2, \quad q_2 0 - q_3, \quad q_2 1 R q_1.$$

Selle masina programmi graaf on kujutatud joonisel 6.3.



Joonis 6.3: Ülesande 4.18 vastus

4.19. $S = \{0, 1, +, -\}$ (0 - tühi sümbol), $Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4\}$ ja programm on

$$q_1 0 + q_3, \quad q_1 1 R q_2, \quad q_2 0 - q_3, \quad q_2 1 R q_1,$$

$$q_3 + L q_3, \quad q_3 1 L q_3, \quad q_3 0 R q_4, \quad q_3 - L q_3.$$

Selle masina programmi graaf on kujutatud joonisel 6.4.

Autori koduleht

Tiitelleht

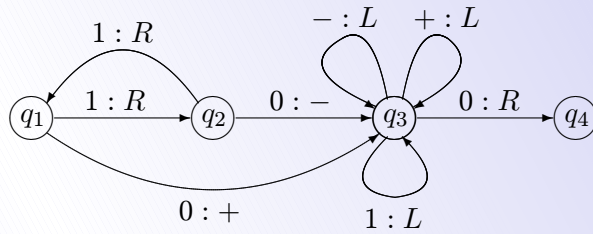


Lk 217 / 247

Tagasi

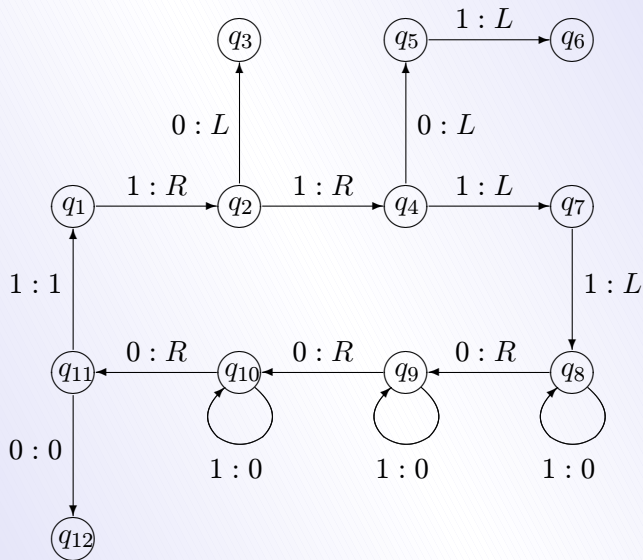
Täisekraan

Lahku failist



Joonis 6.4: Ülesande 4.19 vastus

4.20. Joonisel 6.5 kujutatud Turingi masin.



Joonis 6.5: Ülesande 4.20 vastus

Autori koduleht

Tiitelleht



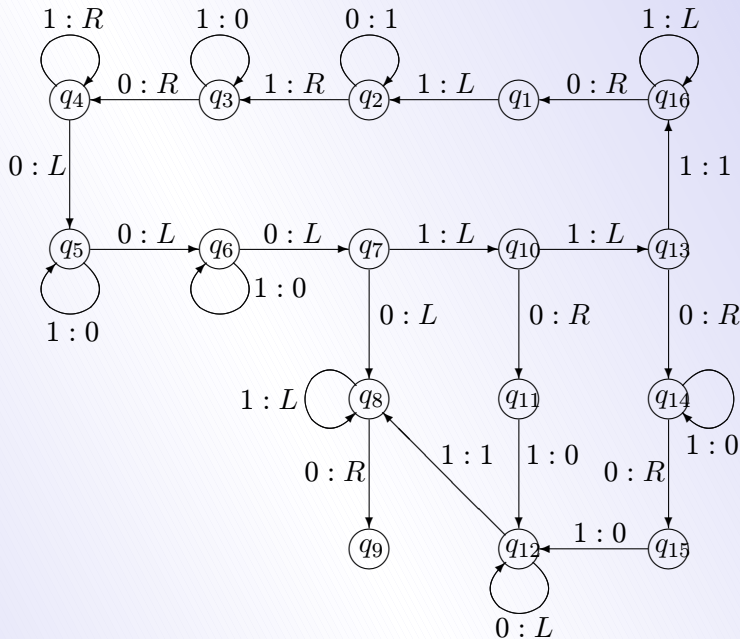
Lk 218 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.21. Joonisel 6.6 kujutatud Turingi masin.



Joonis 6.6: Ülesande 4.21 vastus

4.22. $q_1 1 0 q_2$, $q_1 0 R q_3$, $q_2 0 R q_1$, $q_3 1 R q_3$, $q_3 0 1 q_4$, $q_4 1 L q_4$, $q_4 0 1 q_5$.

4.23. Lahenduse idee:

1. Teha alguses olev 01 10-ks ja viia lugev-kirjutav pea sellest 0-st järgmise ruudu kohale.
2. Kui lugeva-kirjutava pea kohal on 0, siis teha tagapool olevad 1-d 0-deks ja viia lugev-kirjutav pea esimese 1 kohale ning töö on lõppenud.
3. Kui lugeva-kirjutava pea kohal on 1, siis minna lõppu ja kustutada viimane 1 ning minna lugeva-kirjutava peaga eelmisele ruudule.
4. Kui seal on 0, siis kustutada eespoolsed 1-d ja jätta esimesed ühed alles ning masin lõpetab töö.
5. Kui seal on 1, siis minna algusesse (esimese argumendi) ja korrata protseduuri.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

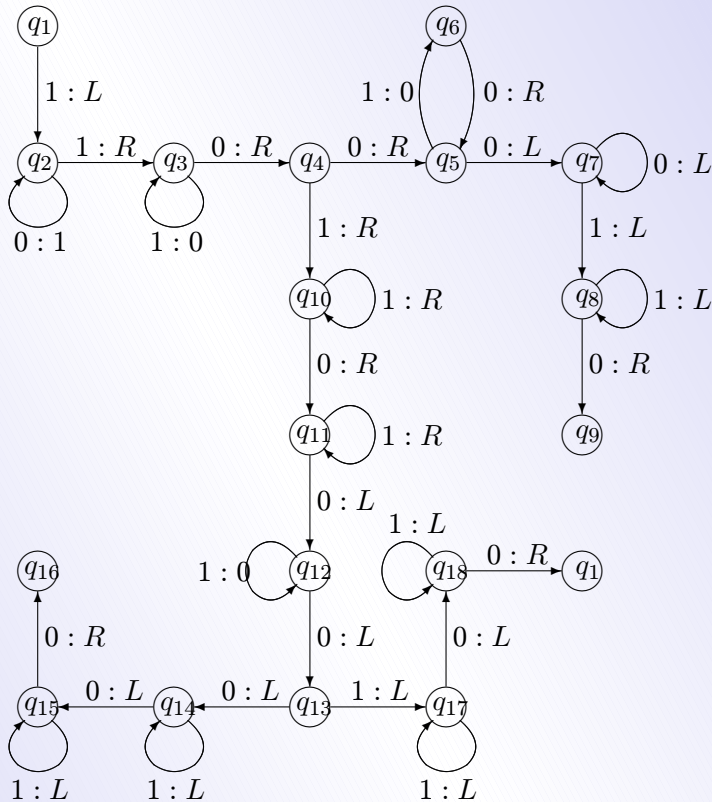
Lk 219 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Vastav Turingi masin on kujutatud joonisel 6.7.



Joonis 6.7: Ülesande 4.23 vastus

4.24. Lahenduse idee:

1. Teha alguses olev 01 10-ks ja viia lugev-kirjutav pea sellest 0-st järgmise ruudu kohale.
2. Kui lugeva-kirjutava pea kohal on 0, siis minnakse lõppu, kirjutatakse seal 1 kohale 0 ja minnakse eelmise ruudu juurde.
 - a) Kui seal on 0, siis minnakse algusesse 1 juurde ja lõpetatakse töö.
 - b) Kui seal on 1, siis kustutatakse vahepealsed 0-d ja viiakse lugev-kirjutav pea algusesse ning masin lõpetab töö.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀ ▶

◀ ▶

Lk 220 / 247

Tagasi

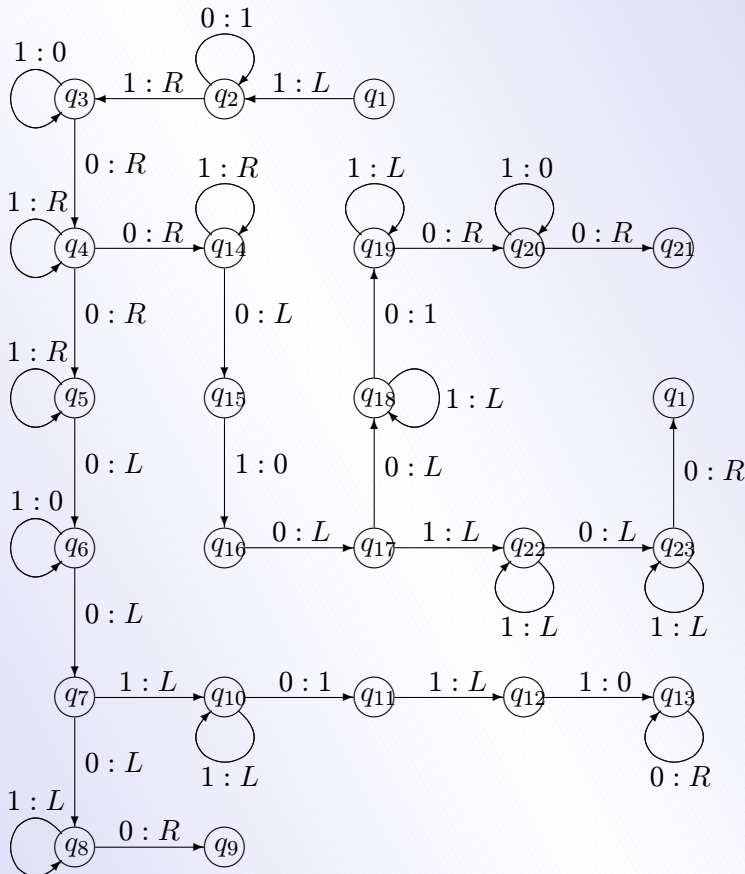
Täisekraan

Lahku failist

3. Kui lugeva-kirjutava pea kohal on 1, siis minna lõppu, kirjutada seal 1 kohale 0 ja minna eelmise ruudu juurde.

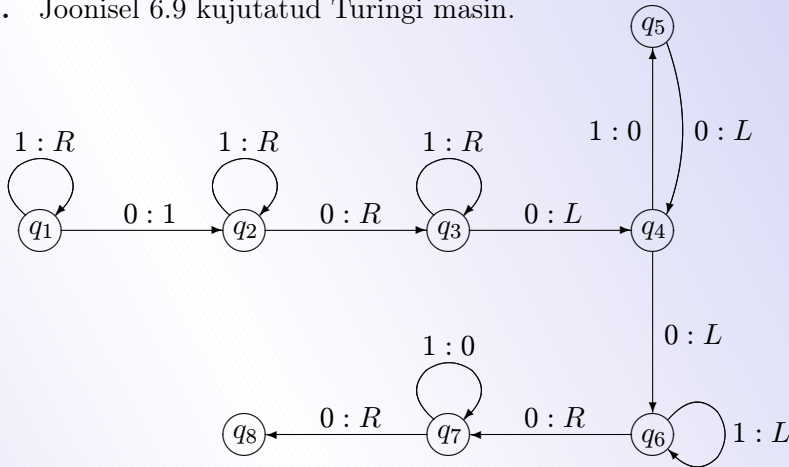
- Kui seal on 0, siis minnakse algusesse ja kustutatakse vahepealsed 0-d ning minnakse esimese 1 juurde ning masin lõpetab töö.
- Kui seal on 1, siis minnakse algusesse esimese argumenti 1 juurde ning korratakse protseduuri alates 1.-st.

Vastav Turingi masin on kujutatud joonisel 6.8.



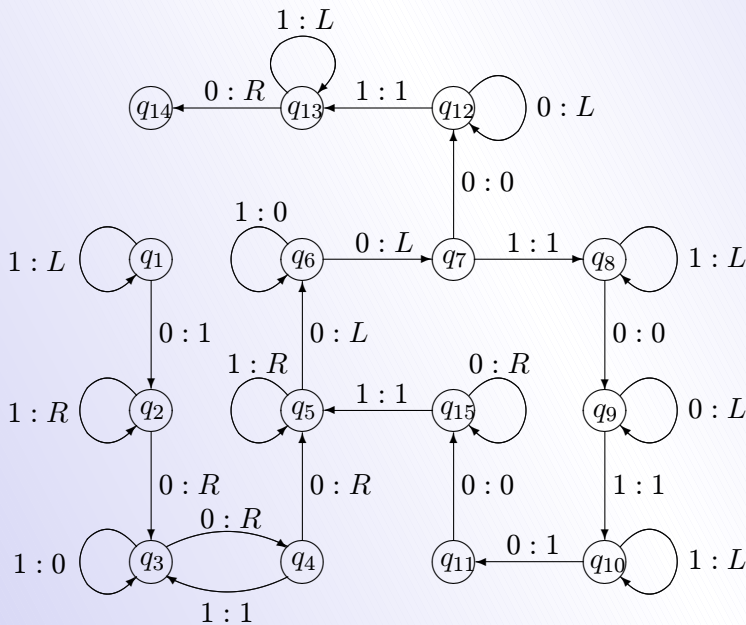
Joonis 6.8: Ülesande 4.24 vastus

4.25. Joonisel 6.9 kujutatud Turingi masin.



Joonis 6.9: Ülesande 4.25 vastus

4.26. Joonisel 6.10 kujutatud Turingi masin.



Joonis 6.10: Ülesande 4.26 vastus

Autori koduleht

Tiitelleht



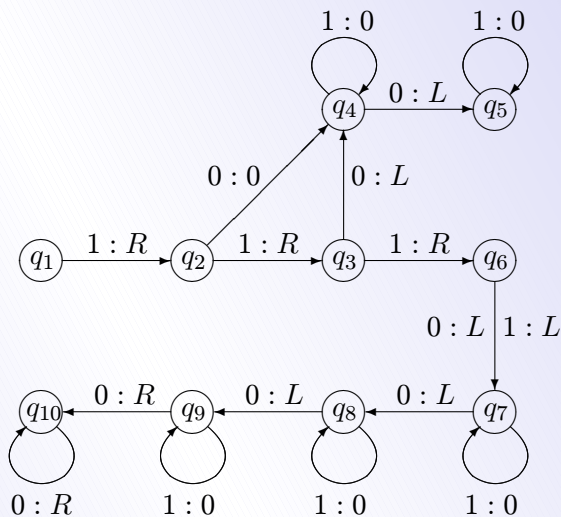
Lk 222 / 247

Tagasi

Täisekraan

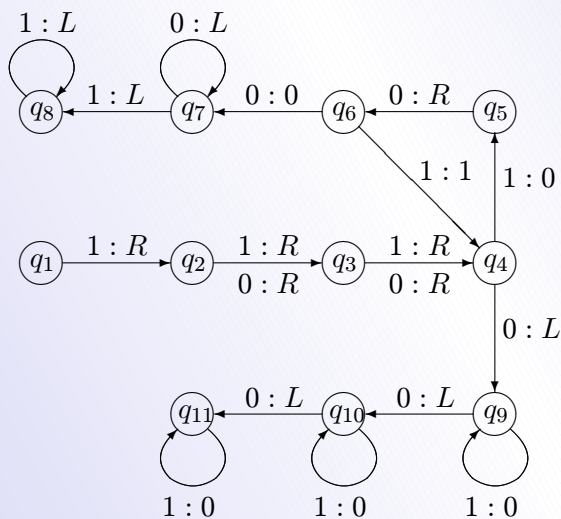
Lahku failist

4.27. Joonisel 6.11 kujutatud Turingi masin.



Joonis 6.11: Ülesande 4.27 vastus

4.28. Joonisel 6.12 kujutatud Turingi masin.



Joonis 6.12: Ülesande 4.28 vastus

Autori koduleht

Tiitelleht



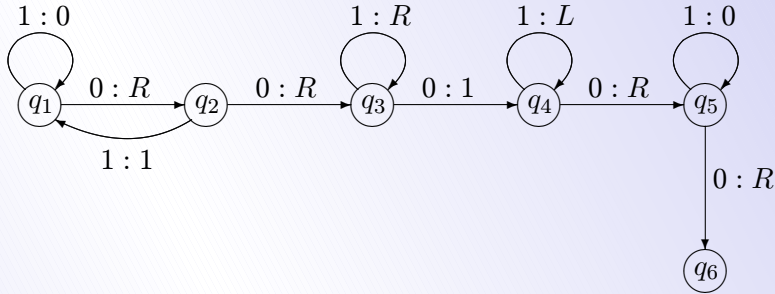
Lk 223 / 247

Tagasi

Täisekraan

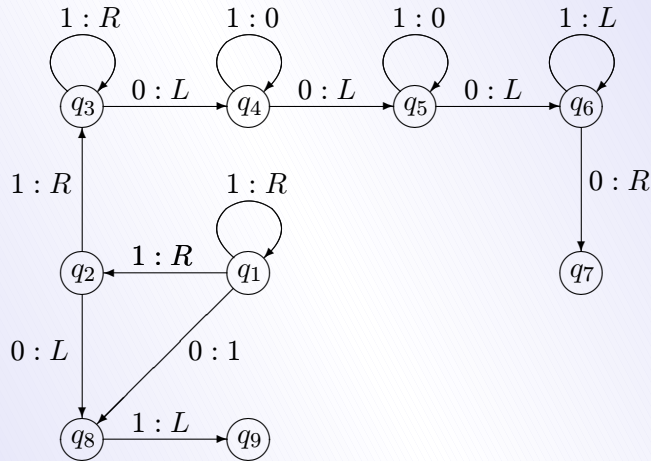
Lahku failist

4.29. Joonisel 6.13 kujutatud Turingi masin.



Joonis 6.13: Ülesande 4.29 vastus

4.30. Joonisel 6.14 kujutatud Turingi masin.



Joonis 6.14: Ülesande 4.30 vastus

4.31. $f_1 = S(f, I_2^n, I_1^n, I_3^n, \dots, I_n^n).$

4.32. $f_2 = S(f, I_2^n, \dots, I_n^n, I_1^n).$

4.33. $f_3 = S(f, I_1^{n+1}, I_2^{n+1}, \dots, I_n^{n+1}).$

4.34. $f_4 = S(f, I_1^n, I_1^n, I_2^n, \dots, I_{n-1}^n).$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 224 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.35. $f = S(g, I_1^2, I_1^2)$, kus $g(x, y) = xy$.

4.36. $f = P(S(s, o), S(g, I_1^3, I_3^3))$, kus $g(x, y) = xy$.

4.37. Kui $n = 0$, siis $f = o$. Kui $n \geq 1$, siis $f = s(\dots(s(o(x))\dots))$.

4.38. Kuna $f(0) = 0$ ja

$$f(y + 1) = 1 = s(o(y)) = \psi(y, f(y)) = s(o(I_1^2(y, f(y)))),$$

siis

$$\psi = S(s, S(o, I_1^2)), \quad f = P(0, S(s, S(o, I_1^2))).$$

4.39. Kuna $f(0) = 1$ ja

$$f(y + 1) = 0 = o(I_1^2(y, f(x, y))) = \psi(y, f(y)),$$

siis

$$\begin{aligned} \psi(y, z) &= o(I_1^2(y, z)), \quad \psi = S(o, I_1^2), \\ f &= P(0, \psi) = P(0, S(o, I_1^2)). \end{aligned}$$

4.40. Tähistagem $h(x, y) = x \ominus y$. Näite 4.61 põhjal on funktsioon h lihtrekursiivne. Kuna

$$\min(x, y) = h(x, h(x, y)) = h(I_1^2(x, y), h(x, y)),$$

siis $\min = S(h, I_1^2, h)$ ja funktsioon $\min$ on lihtrekursiivne.

4.41. Tähistagem $g(x, y) = x + y$ ja $h(x, y) = x \ominus y$. Näidete 4.58 ja 4.61 põhjal on funktsioonid g ja h lihtrekursiivsed. Kuna

$$\max(x, y) = (x \ominus y) + y = g(h(x, y), I_2^2(x, y)),$$

siis $\max = S(g, h, I_2^2)$ ja funktsioon $\max$ on lihtrekursiivne.

4.42. $f = P(1, S(K, I_2^2, S(s, I_1^2)))$, kus $K(x, y) = xy$.

4.43. Tuleb leida vähim w , mille korral $yw > x$ ehk vähim w , mille korral $1 - \text{sg}(yw - x) = 0$. Siis $z = w - 1$. Seega funktsioon $w(x, y)$ saadakse minimiseerimisoperaatoriga lihtrekursiivsest funktsioonist $g(x, y, w) = 1 - \text{sg}(yw - x)$. Seega $z = f(x, y)$ on osaliselt rekursiivne kui osaliselt rekursiivsete funktsioonide $w(x, y)$ ja $u(x, y) = 1$ vahe.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 225 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.44. Funktsioon $g(x, y) = |x - y^2|$ on lihtrekursiivne. Vähim y , mille korral $g(x, y) = 0$, on $\sqrt{x}$. Seega saadakse funktsioon f minimeerimisoperaatoriga lihtrekursiivsest funktsioonist g .

4.45. Lahendus:

$$\begin{aligned} g(x_1, \dots, x_n, 0) &= \varphi(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n, 0) = \\ &= f(I_1^n(x_1, \dots, x_n), \dots, I_n^n(x_1, \dots, x_n), o_n(x_1, \dots, x_n)), \\ \varphi &= S(f, I_1^n, \dots, I_n^n, o_n), \\ g(x_1, \dots, x_n, y+1) &= g(x_1, \dots, x_n, y) + f(x_1, \dots, x_n, y+1) = \\ &= z + f(x_1, \dots, x_n, s(y)), \quad z = g(x_1, \dots, x_n, y). \end{aligned}$$

Tuleb valida ψ nii, et

$$g(x_1, \dots, x_n, y+1) = \psi(x_1, \dots, x_n, y, z) = z + f(x_1, \dots, x_n, s(y)).$$

Tähistame

$$w = (x_1, \dots, x_n, y, z).$$

Siis

$$\begin{aligned} \psi(w) &= z + f(x_1, \dots, x_n, s(y)) = \\ &= I_{n+2}^{n+2}(w) + f(I_1^{n+2}(w), \dots, I_n^{n+2}(w), s(I_{n+1}^{n+2}(w))) = \\ &= I_{n+2}^{n+2}(w) + f(I_1^{n+2}(w), \dots, I_n^{n+2}(w), S(s, I_{n+1}^{n+2})(w)) = \\ &= I_{n+2}^{n+2}(w) + S(f, I_1^{n+2}, \dots, I_n^{n+2}, S(s, I_{n+1}^{n+2}))(w) = \\ &= S(L, I_{n+2}^{n+2}, S(f, I_1^{n+2}, \dots, I_n^{n+2}, S(s, I_{n+1}^{n+2}))) (w), \end{aligned}$$

kus $L(x, y) = x + y$. Seega

$$\psi = S(L, I_{n+2}^{n+2}, S(f, I_1^{n+2}, \dots, I_n^{n+2}, S(s, I_{n+1}^{n+2})))$$

ja

$$g = P(\varphi, \psi).$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 226 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.46. Lahenduskäik on analoogiline eelmise ülesande lahenduskäiguga, tuleb vaid liitmisfunktsioon $L(x, y) = x + y$ asendada korrutamisfunktsiooniga $K(x, y) = xy$. Seega

$$g = P(\varphi, \psi),$$

kus

$$\varphi = S(f, I_1^n, \dots, I_n^n, o_n)$$

ja

$$\psi = S(K, I_{n+2}^{n+2}, S(f, I_1^{n+2}, \dots, I_n^{n+2}, S(s, I_{n+1}^{n+2}))).$$

4.47. Lahendus:

$$\begin{aligned} f(0) = 0, \quad f(y+1) &= 2(y+1) = 2y+2 = f(y)+2 = s(s(f(y))) = \\ &= s(s(z)) = \psi(y, f(y)) = \psi(y, z), \quad z = f(y), \\ \psi(y, z) &= s(s(z)) = s(s(I_2^2(y, z))) = S(s, S(s, I_2^2))(y, z), \\ \psi &= S(s, S(s, I_2^2)), \quad f = P(0, S(s, S(s, I_2^2))). \end{aligned}$$

4.48. $f(x, y) = x(y+1) + \frac{1}{2} \cdot y(y-1), \quad f = P(\varphi, \psi).$

4.49.

$$f(x, y) = \begin{cases} x, & \text{kui } y = 0, \\ 0, & \text{kui } y \geq 1, \end{cases} \quad f = P(\varphi, \psi)$$

4.50. $f(x, y) = x^{y+1}, \quad f = P(\varphi, \psi).$

4.51.

$$f(x, y, z) = \begin{cases} z(x+y) + xy + \frac{1}{2} \cdot z(z-1), & \text{kui } z \geq 1, \\ xy, & \text{kui } z = 0. \end{cases}$$

4.52. $D = \{0\}, \quad f(0) = 0, \quad f = M(g).$

4.53. $D = \mathbb{N}, \quad f(x) = x, \quad f = M(g).$

4.54. $D = \{0\}, \quad f(0) = 0, \quad f = M(g).$

4.55. $D = \mathbb{N}, \quad f(x) = 0, \quad f = M(g).$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 227 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

4.56. Lahendus:

$$f(x, 0) = x = I_1^1(x) = \varphi(x),$$

$$f(x, y + 1) = \psi(x, y, f(x, y)) = x + y^2 + 2y + 1 = f(x, y) + 2y + 1,$$

$$\psi(x, y, z) = z + 2y + 1 = s(z + 2y) = s(L(z, L(y, y))) =$$

$$= s(L(I_3^3(x, y, z), L(I_2^3(x, y, z), I_2^3(x, y, z)))),$$

$$\psi = S(s, S(L, I_3^3, S(L, I_2^3, I_2^3))), \quad f = P(\varphi, \psi).$$

4.57. $f = P(o, S(L, I_3^3, S(K, I_1^3, I_1^3))) = S(K, S(K, I_1^2, I_1^2), I_2^2).$

4.58. $f = P(I_2^2, S(L, I_1^4, I_1^4)).$

4.59. $f(4, 5) = 260.$

4.60. $f(x, y, 6) = x(y^7 + y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 4y + 5).$

4.61. $f(2, y, 3) = 15y + 20.$

4.62.

$$g(x, y) = K(f(x, y, s(o(x))), f(x, y, s(s(o(x))))) =$$

$$= K(f(I_1^2(x, y), I_2^2(x, y), s(o(I_1^2(x, y)))),$$

$$f(I_1^2(x, y), I_2^2(x, y), s(s(o(I_1^2(x, y)))))),$$

$$g = S(K, S(f, I_1^2, I_2^2, S(s, S(o, I_1^2))),$$

$$S(f, I_1^2, I_2^2, S(s, S(s, S(o, I_1^2)))).$$

4.63.

$$g(x) = L(K(f(x, 1), f(x, 2)), f(x, 0)),$$

$$f = S(L, S(K, S(f, I_1^1, S(s, o)), S(f, I_1^1, S(s, S(s, o)))), S(f, I_1^1, o)).$$

4.64.

$$g = S(K, S(L, S(f, I_1^1, o), S(f, I_1^1, S(s, S(s, o)))), S(f, S(s, o), I_1^1)).$$

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 228 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5 GRAAFITEORIA ELEMENTE

5.1. Isomorfsus saavutatakse kujutusega

$$a \mapsto r, \quad b \mapsto s, \quad c \mapsto t, \quad d \mapsto u, \quad e \mapsto w, \quad g \mapsto v.$$

5.2. Vasakpoolse graafi iga tipp on intsidentne vähemalt kahe kaarega, parempoolse graafi tipp t on aga intsidentne ainult ühe kaarega.

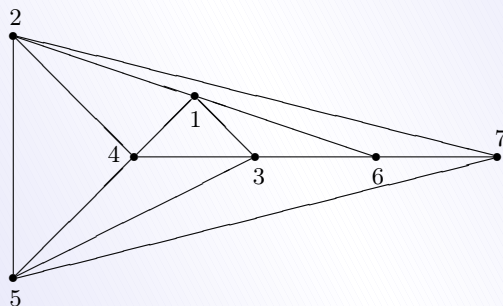
5.3. Isomorfism saavutatakse kujutusega

$$a \mapsto 7, \quad b \mapsto 6, \quad c \mapsto 3, \quad d \mapsto 1, \quad e \mapsto 4, \quad g \mapsto 2, \quad h \mapsto 5.$$

5.4. On. Isomorfism saavutatakse kujutusega

$$a \mapsto r, \quad b \mapsto u, \quad c \mapsto t, \quad d \mapsto s, \quad e \mapsto v.$$

5.5. Ei ole: vaskpoolsel graafil leidub kaks tippu (d ja f), mis on intsidentsed ainult kahe kaarega, kuid parempoolsel graafil leidub kolm tippu (r , v ja w), mis on intsidentsed ainult kahe kaarega.



Joonis 6.15: Ülesande 5.6 vastus

5.6. Vt joonis 6.15.

5.7. Vt joonis 6.16.

5.8. Graafid $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ ja $\mathcal{L}(\mathcal{L}(\mathcal{G}))$ on kujutatud joonisel 6.17, kusjuures

$$1 = (a, b), \quad 2 = (b, c), \quad 3 = (a, d), \quad 4 = (d, e), \quad 5 = (b, e), \quad r = (1, 3),$$

$$s = (1, 2), \quad t = (1, 5), \quad u = (2, 5), \quad v = (3, 4), \quad w = (4, 5).$$

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

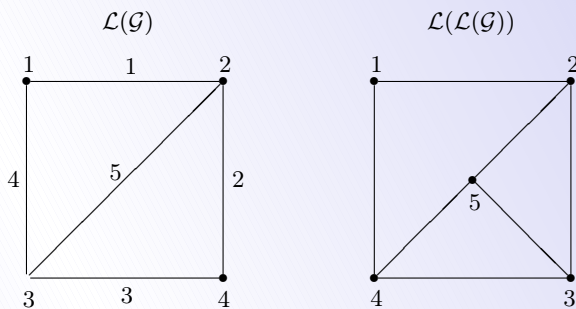
▶

Lk 229 / 247

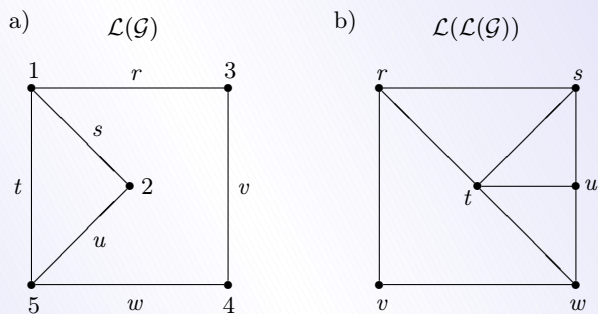
Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

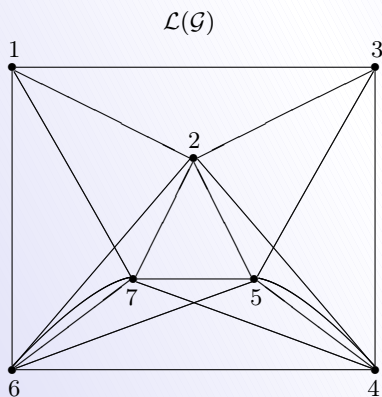


Joonis 6.16: Ülesande 5.7 vastus



Joonis 6.17: Ülesande 5.8 vastus

5.9. Vt joonis 6.18.



Joonis 6.18: Ülesande 5.9 vastus

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 230 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

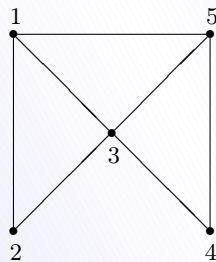
5.10.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}; \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

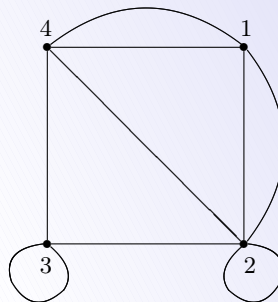
5.11. Vt joonis 6.19 a).

5.12. Vt joonis 6.19 b).

a)



b)



Joonis 6.19: Ülesannete 5.11 ja 5.12 vastused

5.13.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

5.14.

$$A_0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5.15. Kuna

$$A^4 = \begin{vmatrix} 1 & 20 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix},$$

siis 4-teede arv tipust 1 tippu 2 on 20.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 231 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5.16. Kuna

$$A^4 = \begin{vmatrix} 0 & 8 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix},$$

siis 4-teede arv tipust 1 tippu 2 on 8.

5.17. Kuna

$$A^3 = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

siis 3-teede arv tipust 2 tippu 1 on 3.

5.18. Kuna

$$A^3 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 & 6 \\ 4 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 5 & 2 & 0 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix},$$

siis 3-teede arv a) tipust 4 tippu 5 on 5, b) tipust 3 tippu 4 on 4, c) tipust 1 tippu 5 on 6.

5.19.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad A^4 = \begin{vmatrix} 0 & 12 & 6 & 6 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Neljast kaarest koosnevate teede arv tipust 1 tippu 2 on 12.

5.20.

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad A^4 = \begin{vmatrix} 8 & 10 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 3 & 7 \\ 6 & 7 & 2 & 7 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \end{vmatrix}.$$

Neljast kaarest koosnevate teede arv tipust 1 tippu 2 on 10.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 232 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- 5.21.** a) $1-2-6-5-2-3-4-9-8-4-5-8-7-6-1$,
b) $1-2-4-3-4-5-3-2-5-1-5-1$.

5.22. Joonis 5.52, a): $a-b-c-e-b-d-e-h-d-g-h-i-e-f-i-j-f-c-a$. Joonis 5.52, b): $a-b-a-c-f-e-r-j-f-g-c-d-b-i-h-d-g-h-k-g-j-k-p-i-p-r-e-a$.
Joonis 9.52, a): Euleri tsükli ei leidu. Joonis 5.53, b): Euleri tsükli ei leidu. Joonis 9.53, a): $a-e-a-d-b-c-d-e-b-a$.

- 5.23.** $1-2-4-3-2-11-9-3-8-6-4-5-6-7-8-9-10-11-1$.

- 5.24.** $1-2-3-6-9-5-8-7-4-1$.

5.25. Hamiltoni tsükli ei leidu, kuna sel korral peaks iga tipuga olema intsidentsed vähemalt kaks kaart, kuid tipuga 6 on intsidentne vaid üks kaar. Hamiltoni ahel aga on $6-5-2-3-1-4$.

5.26. Näitame matemaatilise induktsiooniga n järgi, et graaf Q_n omab Hamiltoni tsükli. Kui $n = 2$, siis Hamiltoni tsükliks graafis Q_2 on $00-01-11-10-00$. Induktsiooni baas on näidatud.

Oletame, et $n \geq 3$ ja graafis Q_k leidub Hamiltoni tsükkel iga $k < n$ ja $k \geq 2$ korral. Siis graafis Q_{n-1} leidub Hamiltoni tsükkel. Olgu selleks tsükliks

$$0 \dots 0 - i_1 \dots i_{n-1} - \dots - j_1 \dots j_{n-1} - 0 \dots 0.$$

Siis graafis Q_n leiduvad tsükliid

$$0 \dots 00 - i_1 \dots i_{n-1}0 - \dots - j_1 \dots j_{n-1}0 - 0 \dots 00$$

ja

$$0 \dots 01 - i_1 \dots i_{n-1}1 - \dots - j_1 \dots j_{n-1}1 - 0 \dots 01,$$

milledest saab moodustada Hamiltoni tsükli graafis Q_n :

$$\begin{aligned} &0 \dots 00 - i_1 \dots i_{n-1}0 - \dots - j_1 \dots j_{n-1}0 - \\ &- j_1 \dots j_{n-1}1 - \dots - i_1 \dots i_{n-1}1 - 0 \dots 01 - 0 \dots 00. \end{aligned}$$

Induktsioonisamm on näidatud. Vastavalt induktsiooniprintsiibile järeldub siit, et graaf Q_n omab Hamiltoni tsükli iga $n \geq 2$ korral.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 233 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5.27. Asume leidma oletatavat Hamiltoni tsükli τ . Selles tsüklis läbitakse mingil sammul kaar, mis ühendab välimisel viisnurgal asuvat tippu sisemisel viisnurgal asuva tipuga. Sümmeetria tõttu võib eeldada, et tsükkel τ algab ahelaga $1 - 4 - 7$. Edasised võimalused tsükli τ jätkamiseks on

$$1 - 4 - 7 - 9 - 2 - 3, \quad (5.31)$$

$$1 - 4 - 7 - 9 - 10, \quad (5.32)$$

$$1 - 4 - 7 - 5 - 3, \quad (5.33)$$

$$1 - 4 - 7 - 5 - 6. \quad (5.34)$$

Juhul (5.31) on ahelat edasi võimalik jätkata kas kujul

$$1 - 4 - 7 - 9 - 2 - 3 - 5 - 6 - 10 - 8$$

või

$$1 - 4 - 7 - 9 - 2 - 3 - 8 - 10 - 6 - 5.$$

Mõlemal juhul ei teki kinnist ahelat ehk tsükli. Analoogiliselt ei teki ahelate (5.32)–(5.34) jätkamisel tsükli. Seega puudub vaadeldavas graafis Hamiltoni tsükkel.

Sümmeetria tõttu võib vaadelda juhte, kus jäetakse välja kas tipp 1 või tipp 4. Esimesel juhul tekib graaf, milles Hamiltoni tsükliks on $2 - 3 - 5 - 6 - 10 - 8 - 4 - 7 - 9 - 2$. Teisel juhul tekib graaf, milles Hamiltoni tsükliks on $1 - 2 - 9 - 7 - 5 - 3 - 8 - 10 - 6 - 1$.

5.28. Graaf joonisel 5.61, a) on planaarne. Graaf joonisel 5.61, b) pole planaarne, sest sisaldab graafiga $K_{3,3}$ isomorfset alamgraafi, milles iga tipp tippudest a, b, f on ühendatud iga tipuga tippudest d, e, c kaarega.

5.29. Graaf joonisel 5.62, a) pole planaarne, sest sisaldab graafiga $K_{3,3}$ isomorfset alamgraafi. Graafid joonistel 5.62, b) ja 5.63, a), b) on planaarsed.

5.30. Kattev puu koosneb kaartest $(c, e), (e, a), (a, f), (f, d), (d, b)$.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 234 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5.31. Kattev puu koosneb kaartest $(0, 15)$, $(15, 4)$, $(0, 1)$, $(1, 2)$, $(2, 14)$, $(2, 3)$, $(2, 7)$, $(0, 8)$, $(0, 9)$, $(9, 11)$, $(11, 13)$, $(9, 10)$, $(10, 12)$, $(9, 16)$, $(16, 5)$, $(5, 6)$, $(16, 17)$, $(17, 18)$.

5.32. a) 6, b) 6, c) 12.

5.33. Puud järgmiste kaartega:

- a) (a, b) , (d, e) , (c, f) , (e, h) , (b, d) , (g, h) , (c, d) ,
- b) (b, d) , (g, h) , (c, d) , (a, d) , (f, i) , (e, g) , (d, i) , (e, f) ,
- c) (d, h) , (a, b) , (d, e) , (f, i) , (b, c) , (g, h) , (a, d) , (f, h) ,
- d) (c, f) , (a, d) , (e, g) , (g, h) , (b, d) , (h, i) , (b, c) , (e, f) ,
- e) (a, k) , (d, f) , (i, j) , (b, i) , (e, g) , (a, c) , (j, h) , (f, j) , (c, i) , (g, j) ,
- f) (d, g) , (h, i) , (d, e) , (a, e) , (b, c) , (c, e) , (f, h) , (e, h) .

5.34. Lühim tee $1 - 2 - 7 - 9 - 10$ on pikkusega 16 ja pikim tee $1 - 4 - 5 - 8 - 10$ on pikkusega 26.

5.35. Lühimad teed $1 - 4 - 5 - 8 - 10$ ja $1 - 4 - 5 - 9 - 10$ on pikkusega 14. Pikim tee $1 - 2 - 5 - 7 - 10$ on pikkusega 27.

5.36. Lühim tee $1 - 2 - 5 - 7 - 9$ on pikkusega 16. Pikim tee $1 - 2 - 4 - 8 - 9$ on pikkusega 25.

5.37. -2.

5.38.

λ_j^0	λ_j^1	λ_j^2	λ_j^3	λ_j^4	λ_j^5
0	0	0	0	0	0
∞	∞	6	5	5	5
∞	5	4	4	4	4
∞	4	3	3	3	3
∞	2	2	2	2	2
∞	2	2	2	2	2
∞	9	8	7	6	6

Lühim tee $1-6-4-2-7$ on pikkusega 6.

Autori koduleht

Tiitelleht

◀◀

▶▶

◀

▶

Lk 235 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

5.39.

λ_j^0	λ_j^1	λ_j^2	λ_j^3	λ_j^4	λ_j^5
0	0	0	0	0	0
∞	4	4	4	4	4
∞	∞	6	4	4	4
∞	∞	3	3	3	3
∞	5	3	3	3	3
∞	1	1	1	1	1
∞	∞	10	8	7	7

Lühim tee 1-6-4-3-7 on pikkusega 7.

5.40.

λ_j^0	λ_j^1	λ_j^2	λ_j^3	λ_j^4	λ_j^5	λ_j^6
0	0	0	0	0	0	0
∞	∞	10	5	5	5	5
∞	9	9	9	6	6	6
∞	∞	∞	5	5	5	5
∞	∞	3	3	3	3	3
∞	2	2	2	2	2	2
∞	12	10	10	9	8	8

Lühim tee 1-6-5-4-3-7 on pikkusega 8.

5.41. $x_1 = 0$, $x_2 = 15$, $x_3 = 30$, $x_4 = 30$. Suurim eeldatav juurdekasv on 85.

5.42. $x_1 = 0$, $x_2 = 30$, $x_3 = 120$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$. Suurim eeldatav juurdekasv on 62.

5.43. Vt Joonis 6.20.

5.44. Vt Joonis 6.21.

5.45. Vt Joonis 6.22.

5.46. Vt Joonis 6.23.

Autori koduleht

Tiitelleht



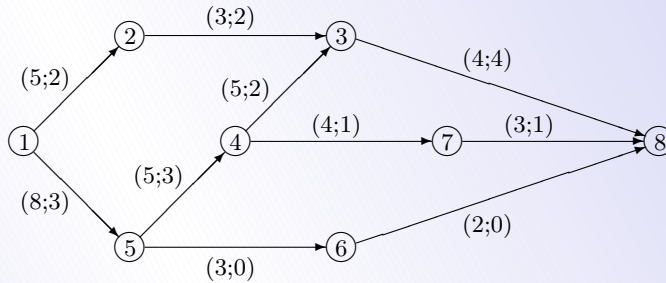
Lk 236 / 247

Tagasi

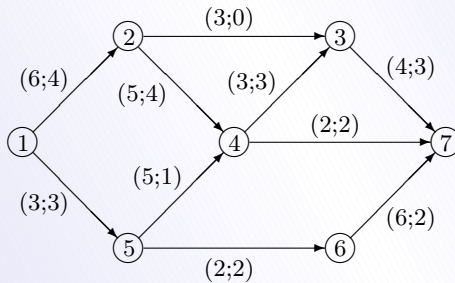
Täisekraan

Lahku failist

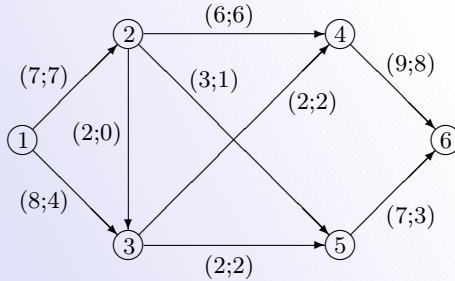
5.47. Vt Joonis 6.24.



Joonis 6.20: Ülesande 5.43 vastus



Joonis 6.21: Ülesande 5.44 vastus



Joonis 6.22: Ülesande 5.45 vastus

Autori koduleht

Tiitelleht

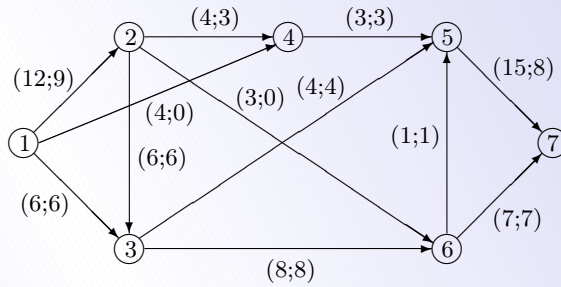


Lk 237 / 247

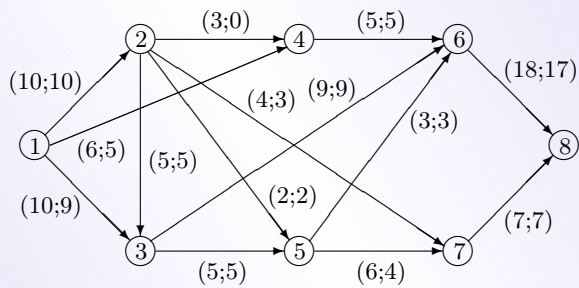
Tagasi

Täisekraan

Lahku failist



Joonis 6.23: Ülesande 5.46 vastus



Joonis 6.24: Ülesande 5.47 vastus

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 238 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Kirjandus

- [1] Kull, I. *Matemaatiline loogika*. Tallinn, 1964.
- [2] Tamme, T., Tammet, T., Prank, R. *Loogika*. Tartu, Tartu Ülikooli Kirjastus, 1997.
- [3] Palm, R., Prank, R. *Sissejuhatus matemaatilisse loogikasse*. Tartu, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2004.
- [4] Prank, R. *Matemaatiline loogika ja algoritmiteooria*. Tartu, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2004.
- [5] Palm, R. *Diskreetse matemaatika elemendid*. Tartu, Tartu Ülikooli Kirjastus, 2003.
- [6] Kaasik, Ü., Kivistik, L. *Operatsioonianalüüs*. Tallinn, 1982.
- [7] Ore, O. *Graafid ja nende kasutamine*. Tallinn, 1976.
- [8] Boolos, G.S., Jeffrey, R.C. *Computability and Logic*. Cambridge Univ. Press, 1989.
- [9] Barwise, J. (ed.) *Handbook of Mathematical Logic*. North Holland, 1977.
- [10] Rosen, K.H. *Discrete Mathematics and Its Applications*. New York [etc.], McGraw-Hill, 1995.
- [11] Grimaldi, R.P. *Discrete and Combinatorial Mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, 1994.
- [12] Anderson, J.A. *Discrete Mathematics with Combinatorics*. Prentice Hall, Inc., 2001. (Venekeelne tõlge: Андерсон Д. А. *Дискретная математика и комбинаторика*. Москва, Санкт-Петербург, Киев, Изд. "Вильямс", 2003.)
- [13] Mendelson, E. *Introduction to Mathematical Logic*. D. van Nostrand Company, Inc., 1963. (Venekeelne tõlge: Мендельсон Э. *Введение в математическую логику*. Москва, Наука, 1971.)

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 239 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- [14] Kleene, S.C. *Mathematical Logic*. John Wiley and Sons, Inc., 1967. (Venekeelne tõlge: Клини С.К. *Математическая логика*. Москва, Мир, 1973.)
- [15] Rogers, H. Jr. *Theory of Recursive Functions and Effective Computability*. McGraw-Hill Book Company, 1967. (Venekeelne tõlge: Роджерс Х. *Теория рекурсивных функций и эффективная вычислимость*. Москва, Мир, 1972.)
- [16] Harary, F. *Graph Theory*. Addison-Wesley Publishing Company, 1969. (Venekeelne tõlge: Харари, Ф. *Теория графов*. Москва, Мир, 1973.)
- [17] Нефедов В.Н., Осипова В.А. *Курс дискретной математики*. Москва, МАИ, 1992.
- [18] Новиков Ф.А. *Дискретная математика*. Санкт-Петербург, Питер, 2001.
- [19] Иванов Б.Н. *Дискретная математика*. Москва, Лаборатория Базовых Знаний, 2001.
- [20] Новиков П.С. *Элементы математической логики*. Москва, Наука, 1973.
- [21] Мальцев А.И. *Алгоритмы и рекурсивные функции*. Москва, Наука, 1986.
- [22] Лавров И.А., Максимова Л.Л. *Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов*. Москва, Изд. "Физико-математическая литература", 1995.
- [23] Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. *Задачи и упражнения по дискретной математике*. Москва, Физматлит, 2004.
- [24] *Машины Тьюринга и рекурсивные функции*. Москва, Мир, 1972.

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 240 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Aineregister

m -aarne puu, 157
 n -aarne funktsioon, 40
 n -aarne tehe, 40
 n -kohaline funktsioon, 40
 n -kohaline tehe, 40
 n -s aste, 80
 r -marsruut, 132
 r -tee, 134, 168
 ühendsüsteem, 102
 ühik, 50, 73, 80
 üldistamine, 72
 üldisuse kvantor, 39
 üleminekufunktsioon, 83
 ülesanne
 lühima tee, 165
 pikima tee, 165
 Abeli rühmade teooria, 76
 Ackermanni funktsioon, 112
 ahel, 131
 Hamiltoni, 139
 aksiomaatiline teooria, 57
 aksioom, 57, 59
 aktsepteerima sõna, 89
 alampseudograaf, 130
 algebraline täiend, 162
 algfunktsioon, 109
 algoritm, 78
 efektiivne, 59
 Eukleidese, 78
 antisümmeetria, 73
 arvutatav funktsioon, 78, 103
 asendusreegel, 92
 assotsiatiivsus, 73
 atomaarne valem, 43

automaat, 79, 83
 lõplik, 83
 bigraaf, 148
 binaarne puu, 157
 Boole'i algebra, 22, 76
 Boole'i funktsioon, 23
 Boole'i muutujateks, 22
 butaan, 158
 Churchi tees, 79, 112
 deduktsiooniteoreem, 63
 disjunktsioon, 6
 disjunktsiooni
 assotsiatiivsus, 14
 distributiivsus konjunktsiooni
 suhtes, 14
 idempotentsus, 14
 kommutatiivsus, 14
 distributiivsete võrede teooria, 76
 dodekaeeder, 151
 duaalne valem, 16
 duaalsprintsip, 16
 efektiivne algoritm, 59
 eitus, 6
 ekvivalents, 7
 ekvivalentsiklass, 137
 ekvivalentsiseos, 13, 137
 elementaarkonjunktsioon, 17
 täielik, 17, 20
 elementaarselt ekvivalentsed struk-
 tuurid, 75
 Eukleidese algoritm, 78
 Euleri teoreem, 138

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 241 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

Euleri tsükkel, 137

fiktiivne muutuja, 14

Ford-Fulkersoni teoreem, 186

formaalne aksiomaatiline teooria,
58

formaalne tõestus, 59

funktsionaalsümbolid, 42

funktsioon, 40, 101

Ackermanni, 112

arvutatav, 78, 103

kõikjal määratud, 107

lihtrekursiivne, 109

osaliselt määratud, 107

osaliselt rekursiivne, 79, 111

pidev, 48

rekursiivne, 79

täisarvuline, 101

täisrekursiivne, 111

funktsiooni

märamispiirkond, 107

graaf, 121

hulknurkne, 143

kaarte, 127

kahealuseline, 148

lõplik, 121

orienteeritud, 86, 122

Peterseni, 149

planaarne, 142

sidus, 135

täielik, 147

tasandiline, 142

graafi

dubleerimine, 148

intsidentsusmaatriks, 128

juur, 155

kaar, 86, 121

kaassusmaatriks, 128

kromaatileine arv, 152

lõige, 184

serv, 121

sidususe komponent, 137

tahk, 143

tipp, 86, 121

värvimine, 152

graafide isomorfism, 123

grammatika, 92

kontekst-sensitiivne, 95

kontekstivaba, 95

regulaarne, 95

tüüpi 0, 95

tüüpi 3, 95

grammatika keel, 93

Hamiltoni ahel, 139

Hamiltoni tsükkel, 139

heksaeeder, 151

homöomorfsed graafid, 148

hulknurkne graaf, 143

ikosaeeder, 151

implikatsioon, 7

indiviid, 37

indiviidmuutuja, 42

interpretatsiooni kandja, 45

interpreteeriv kujutus, 45

intsidentne, 121

intsidentsed tipud, 125

isoleeritud tipp, 126

isomeer, 158

isomorfne, 74

juurega puu, 155

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 242 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- käsk, 98
 küllastatud kaar, 180
 Königsbergi sildade ülesanne, 124
 lahendus, 139
 kaalufunktsioon, 165
 kaar
 orienditunud, 122
 kaare
 algustipp, 177
 lõpptipp, 177
 pikkus, 165
 kaare kordsus, 121
 kaare otspunkt, 121
 kaare pikkus, 165
 kaarte graaf, 127
 kahealuseline graaf, 148
 kahendpuu, 157
 Kaliningrad, 124
 kattev puu, 160
 keel, 80
 esimest järku, 42
 kõrgemat järku, 42
 regulaarne, 81, 96
 tähestikus V , 80
 keelte
 astendamise, 81
 korruptis, 81
 kehtestatav valem, 11
 Kleene'i sulund, 81
 Kleene'i tees, 79
 Kleene'i teoreem, 91
 koma, 42
 konfiguratsioon, 102
 konjunktsioon, 6
 konjunktsiooni
 assotsiatiivsus, 14
 distributiivsus disjunktsiooni
 suhtes, 14
 idempotentsus, 14
 kommutatiivsus, 14
 konjunktsioonide disjunktsioon, 22
 konstantsümbolid, 42
 kontekstivaba keel, 96
 kontingentne valem, 11
 kontradiktsioon, 11
 korrapärane
 kaheksatahukas, 151
 kakskümmendtahukas, 151
 kaksteisttahukas, 151
 kuustahukas, 151
 nelitahukas, 151
 Kuratowski teoreem, 148
 kuup, 149, 151
 kvantor, 38
 üldisuse, 39
 olemasolu, 39
 kvantori mõjupiirkond, 43
 läbilaskevõime, 177
 lähtesümbol, 92
 lühima tee ülesanne, 165
 lühima tee ülesanne, 124
 lõike läbilaskevõime, 184
 lahenduv elementaarteooria, 75
 lahenduv hulk, 11
 lause, 6
 tõene, 6
 tõeväärtus, 6
 väär, 6
 lausearvutus, 8
 lausearvutuse
 sümbol, 8
 süntaks, 8

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 243 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- valem, 8
 valemi interpretatsioon, 10
 valemi tõeväärtus, 10
 lausemuutuja, 8
 leksikograafiline järjestus, 159
 lihtahel, 131
 lihtrekursiivne funktsioon, 109
 lihtrekursioonioperaator, 108
 lihttsükkel, 132
 liitfunktsioon, 26, 107
 Lindenbaumi lemma, 74
 linditähestik, 97
 lint, 97
 loenduv hulk, 8, 58
 loogiline sümbol, 8
 loogilised sümbolid, 42
 loogiliselt samaväärsed valemid, 13
 loogiliselt tõene valem, 75
 lugev-kirjutav pea, 97
 marsruudi
 pikkus, 132
 marsruut, 131
 kinnine, 131
 marsruutide võrdsus, 132
 matemaatiline struktuur, 44
 mets, 154
 minimaalne lõige, 184
 minimaalne lihttsükkel, 143
 minimiseerimisoperaator, 108
 mitteterminaalne sümbol, 92
 modus ponens, 62
 monoid, 80
 Moore'i masin, 113
 multigraaf, 122
 muutuja
 seotud, 43
 vaba, 43
 naaberkaared, 125
 naabertipud, 125
 neelduvuse seadus, 14
 neljavärviprobleem, 153
 normaalne mudel, 77
 nullaarne funktsioon, 40
 oktaeeder, 151
 olek, 83
 olekute hulk, 97
 olekute tabel, 86
 olemasolu kvantor, 39
 omaaksioom, 72
 operaator, 107
 osaliselt järjestatud hulk, 72
 osaliselt rekursiivne funktsioon, 79, 111
 pöördelement, 50, 73
 põhilised loogilised samaväärsused, 14
 põhimudel, 74
 paaristipp, 126
 paaritu tipp, 126
 Peterseni graaf, 149
 piiraja, 42
 pikima tee ülesanne, 165
 planaarne graaf, 142
 Platoni keha, 150
 poolrühm, 80
 predikaadi tõesuspiirkond, 37
 predikaat
 n -kohaline, 37
 ühekohaline, 37
 predikaatarvutuse põhiseadused, 51

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 244 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

- predikaatsümbolid, 42
prefikskuju, 54
Pregeli jõgi, 124
produktiivsus, 104
produksioon, 92
programm, 83, 97, 98
pseudograaf, 122
Pumping lemma, 90
puu, 154
 m-aarne, 157
 binaarne, 157
 juurega, 155
 kattev, 160
 leht, 155
 sügavus, 155
 täielik, 157
puu kõrgus, 155

rühm, 50, 73
rühmateooria, 76
rändkaupmehe ülesanne, 124, 140
refleksiivsus, 13, 73
regulaarne avaldis, 81
regulaarne keel, 81, 96
rekursiivne funktsioon, 79
rippuv tipp, 126

süllogismi reegel, 65
sümbolite hulk, 58
sümmeetrilisus, 13
süntaks, 41
süsinik, 158
sõna, 58
sõna tuletus, 93
sõnade korrutis, 80
sõna, 80
samaselt tõene valem, 11

samaselt väär valem, 11
samaväärsed valemid, 50
segagraaf, 122
semantika, 42
Sheffer'i kriips, 27
sidus graaf, 135
sidususe komponent, 137
signatuur, 42
signatuuri interpretatsioon, 45
silmus, 121
sisendlint, 84
sisendsümbol, 83
standardmude, 74
string, 80
struktuuri elementaarteooria, 75
struktuuri esimest järku teooria, 75

Substitutsiooniteoreem, 12
sulud, 8, 42
superpositsioon, 26
superpositsioonioperaator, 107

tähestik, 58, 80
täielik bigraaf, 148
täielik graaf, 147
täielikkus kitsamas mõttes, 74
täielikkuse teoreem, 71
täisarvuline funktsioon, 101
täisrekursiivne funktsioon, 111
tühi sõna, 80
tühiksümbol, 97
tõeväärtusfunktsioon, 23
tõeväärtustabel, 7
Tarry algoritm, 135
tasandiline graaf, 142
tautoloogia, 11
tee, 134

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 245 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

pikkus, 165
 tee pikkus, 134
 tehe
 assotsiatiivne, 50
 binaarne, 49
 tekitatud keel, 91, 93
 teooria, 58
 laiend, 74
 mittevasturääkiv, 74
 täielik, 74
 teoreem, 59
 tuletusreegel, 59
 valem, 58
 teooria $\mathcal{L}$, 61
 aksioomid, 61
 tähestik, 61
 tuletusreeglid, 62
 valemid, 61
 teoreem, 57, 59, 62
 Euleri, 138
 Ford-Fulkersoni, 186
 Kuratowski, 148
 term, 42
 terminaalsümbol, 92
 tetraeder, 149, 151
 tipp
 isoleeritud, 126
 paaritu, 126
 rippuv, 126
 vahepealne, 178
 tipu
 eellane, 155
 isa, 155
 järglane, 155
 poeg, 155
 tipu lokaalne aste, 125

transitiivsus, 13, 73
 trasside ülesanne, 125
 tsükkel, 131
 Hamiltoni, 140
 tuletatav valem, 59, 60
 tuletus, 59
 tuletusreegel, 58, 59
 Turingi masin, 79, 97
 arvutab funktsiooni, 102, 103
 Turingi masina
 konfiguratsioon, 102
 produktiivsus, 104
 standardkonfiguratsioon, 102

 Ulami hüpotees, 131

 väljundfunktsioon, 83
 väljundlint, 84
 väljundsümbol, 83
 võrgu
 alguspunkt, 177
 lõpp-punkt, 177
 võrk, 177
 võrdusega esimest järku teooria,
 76
 vahepealne tipp, 178
 vahetu järelsus, 59
 vahetult tuletatav sõna, 93
 valem, 41, 43, 58
 atomaarne, 43
 kinnine, 43
 loogiliselt tõene, 75
 tuletatav, 59, 60
 valemi
 disjunktiivne normaalkuju, 17
 konjunktiivne normaalkuju, 22

Autori koduleht

Tiitelleht



Lk 246 / 247

Tagasi

Täisekraan

Lahku failist

täielik disjunktiivne normaalku-
ju, 20
valemi prefikskuju, 54
valemi substituatsioon, 12
valemi tuletus, 59, 60
valiku aksioom, 57
vesinik, 158
virga kopra probleem, 104
voo suurus, 180
voog, 178
 küllastatud, 180
 maksimaalne, 180
Webb'i nool, 27

[Autori koduleht](#)[Tiitelleht](#)[Lk 247 / 247](#)[Tagasi](#)[Täisekraan](#)[Lahku failist](#)